

Théorie des ensembles

1A - BUT Info - UCA

Bases Mathématiques 1

Plan du cours

Vocabulaire

Définir un ensemble

Parties d'un ensemble

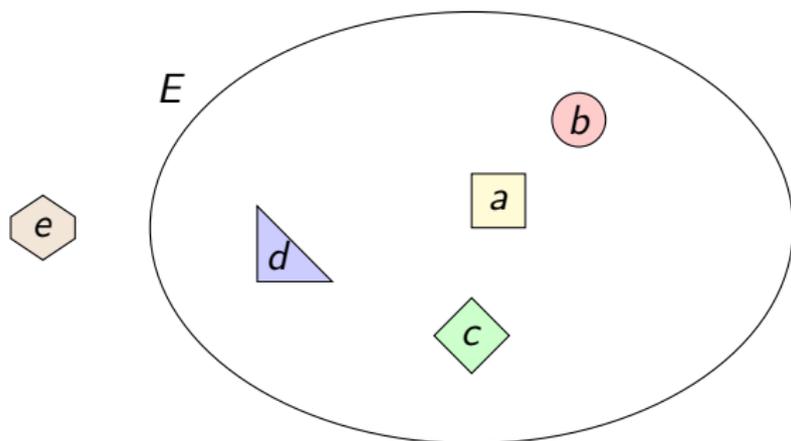
Plan du cours

Vocabulaire

Définir un ensemble

Parties d'un ensemble

Élément, appartenance



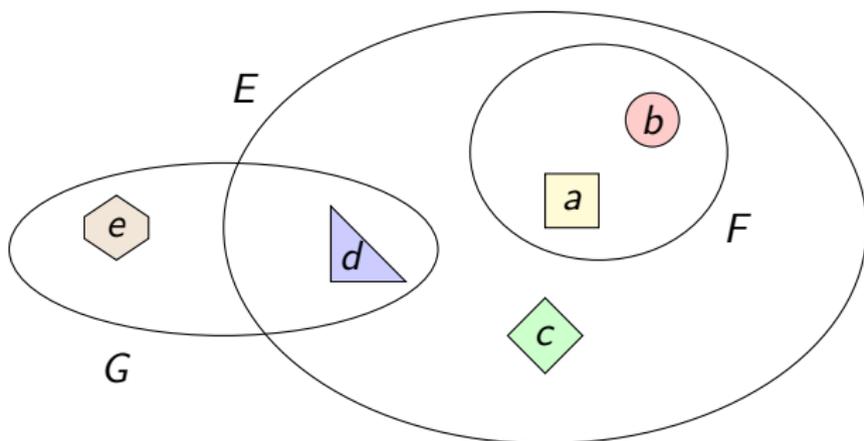
a est un élément de E

a appartient à E

$a \in E$

$e \notin E$

Sous-ensemble, inclusion



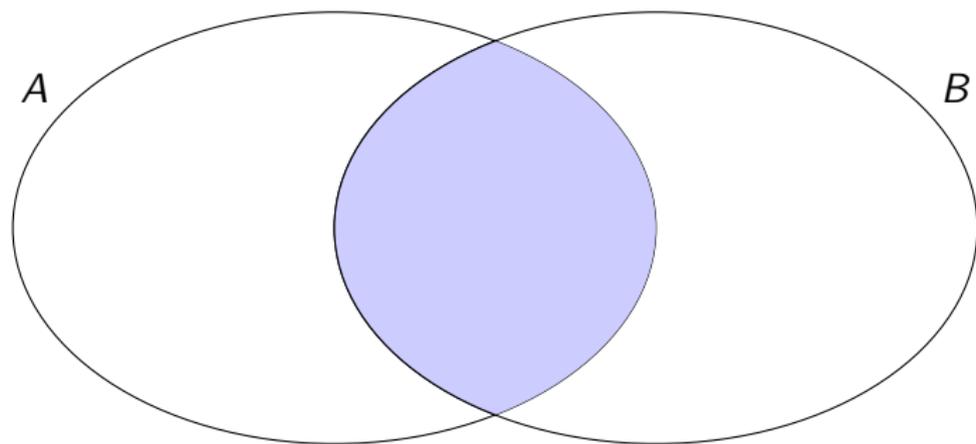
F est un sous-ensemble de E , F est une partie de E

F est inclus dans E

$$F \subseteq E$$

$$G \not\subseteq E$$

Intersection



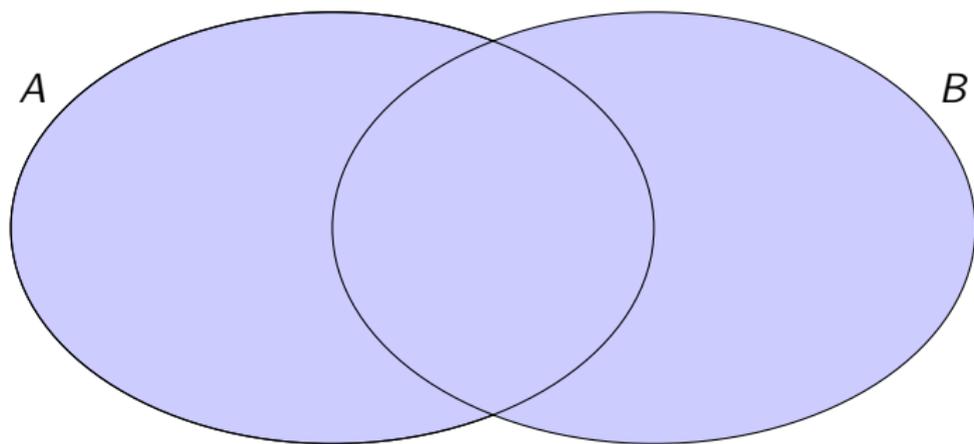
Les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B

L'intersection de A et B

A inter B

$A \cap B$

Réunion



Les éléments qui appartiennent à A , ou à B ou aux deux à la fois

La réunion de A et B , l'union de A et B

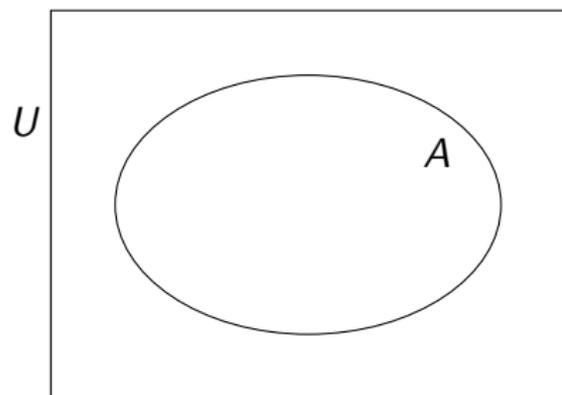
A union B

$A \cup B$

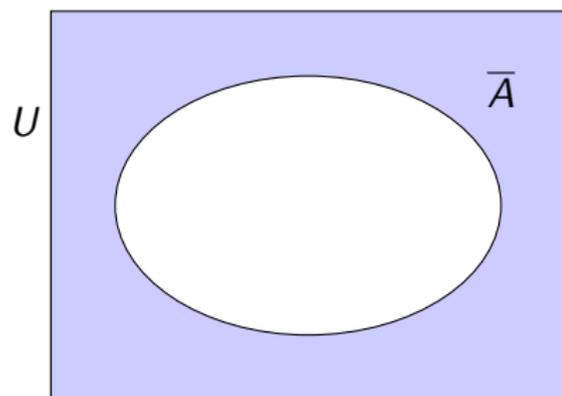
Pièges !

- ▶ les éléments qui sont dans A et dans B
 $\rightsquigarrow A \cap B$
- ▶ les éléments qui sont dans A et les éléments qui sont dans B
 $\rightsquigarrow A \cup B$

Univers, complémentaire

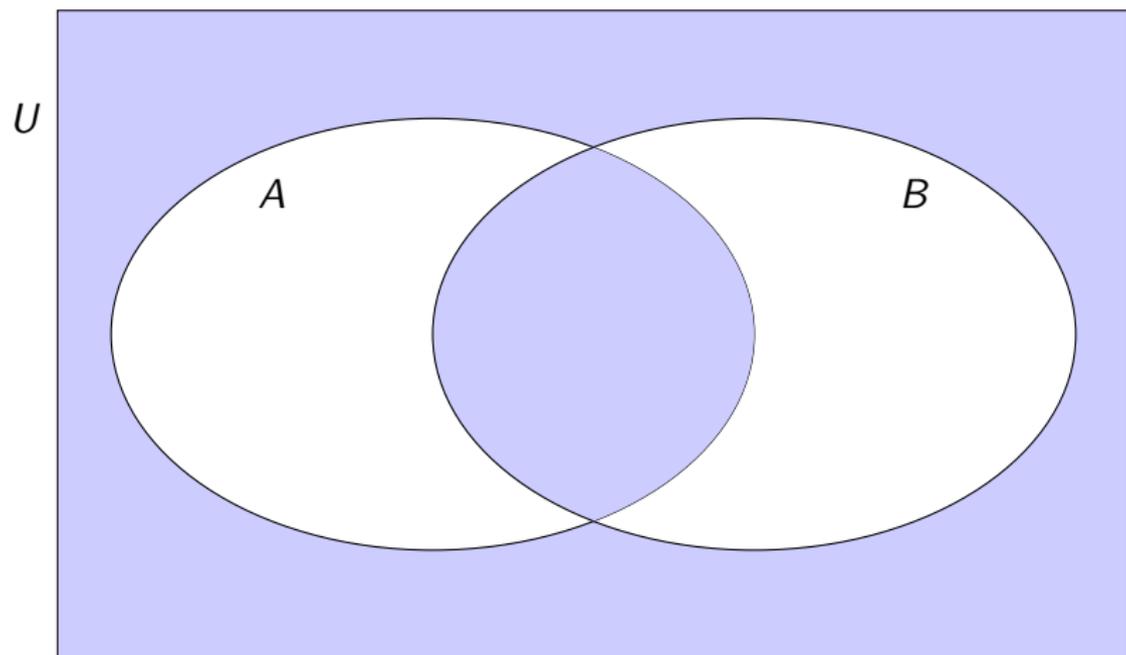


Tout se passe au sein d'un univers U



Les éléments (de l'univers) qui n'appartiennent pas à A
Le complémentaire de A
 A barre
 \bar{A}

Diagrammes de Venn



$$\overline{A \cup B} \cup (A \cap B)$$

Plan du cours

Vocabulaire

Définir un ensemble

Parties d'un ensemble

Deux types de définitions

- ▶ **Définition en extension** : la liste complète des éléments de A , placés entre accolades, séparés par des virgules

$$A = \{a, b, c, d\}$$

- ▶ **Définition en compréhension** : une phrase décrivant sans ambiguïté les éléments de A

A est l'ensemble composé des quatre premières lettres de l'alphabet latin

- ▶ L'ordre des éléments d'un ensemble n'importe pas :

$$\{a, b, c, d\} = \{b, c, a, d\} = \text{etc.}$$

Ensembles vides, finis, infinis, indéterminés

- ▶ L'ensemble des lettres de l'alphabet latin qui ne sont ni des voyelles ni des consonnes
- ▶ $\{a, b, c, d\}$
- ▶ L'ensemble des nombres pairs
- ▶ L'ensemble des nombres dont le temps de vol pour la suite de Syracuse est infini
- ▶ L'ensemble des couples de nombres premiers jumeaux

Plan du cours

Vocabulaire

Définir un ensemble

Parties d'un ensemble

Sous-ensembles et cas particuliers

$$E = \{a, b, c, d\}$$

Sous-ensembles (ou parties) de E :

- ▶ $\{\}$ ou \emptyset ensemble vide
- ▶ $\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{d\}$ singletons
- ▶ $\{a, b\}$ $\{a, c\}$ $\{a, d\}$ $\{b, c\}$ $\{b, d\}$ $\{c, d\}$ paires (non ordonnées)
- ▶ $\{a, b, c\}$ $\{a, b, d\}$ $\{a, c, d\}$ $\{b, c, d\}$
- ▶ $\{a, b, c, d\}$ ou E

Partition d'un ensemble

Des parties deux à deux disjointes et recouvrant l'ensemble

$$E = \{a, b, c, d\}$$

Par exemple : $\{a\}$ $\{b, d\}$ $\{c\}$

car $\{a\} \cap \{b, d\} = \{a\} \cap \{c\} = \{b, d\} \cap \{c\} = \emptyset$

et $\{a\} \cup \{b, d\} \cup \{c\} = E$

\mathbb{N}

Par exemple : ensemble des nombres pairs et ensemble des nombres impairs

car aucun entier n'est pair et impair à la fois,
et tout entier est pair ou impair

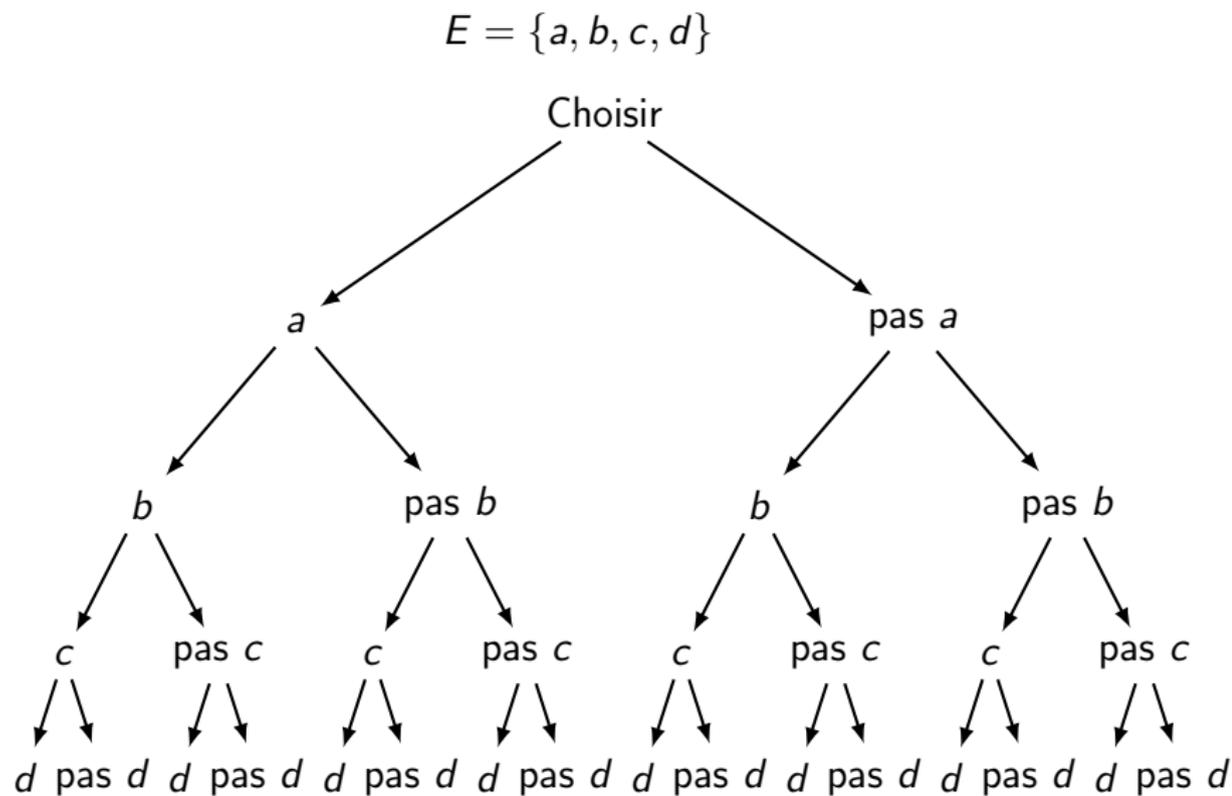
Ensemble des parties

$$E = \{a, b, c, d\}$$

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \\ \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont eux-mêmes des ensembles !

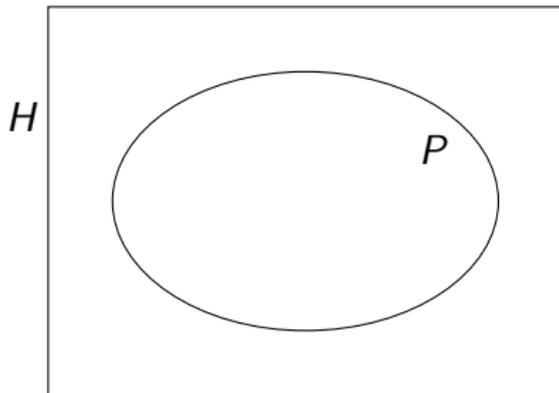
Un ensemble à n éléments possède 2^n parties



« Paradoxe du barbier »

Tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes se font raser par le barbier.

Qui rase le barbier ?



Ensembles d'ensembles

$$E = \{a, b, c, d\}$$

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

$$\{a, b, d\} \in \mathcal{P}(E)$$

$\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des ensembles qui sont des parties de E

$$\mathcal{P}(E) \notin \mathcal{P}(E)$$

Méfiance !

A est l'ensemble de tous les ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes

Est-ce que A appartient à lui-même ?

FIN