# Bases des probabilités
## (Dénombrement)

A. Fradi, A. Khaldi, C. Samir, A. Wohrer

Université d'Auvergne
Clermont-Ferrand Aurillac Le Puy-en-Velay

2A - BUT Info

Année 2023-2024

## Avant de commencer

- Pour toute question sur le cours :


**abderrahmane.khaldi@ext.uca.fr**
**anis.fradi@uca.fr**
**chafik.samir@uca.fr**
**adrien.wohrer@uca.fr**


- Les transparents du cours et d'autres documents sont disponibles sur l'ENT.

## Organisation

### Avant de commencer

- Cours : chaque semaine. Calculatrice obligatoire.
- TD : chaque semaine. Smartphone interdit.
- TP : 1 semaine sur 2 avec le langage python.
- Note : un examen écrit intermédiaire et un final. Les dates seront disponibles sur l'emploi du temps.

## Plan du cours aujourd’hui

1. **Introduction**
2. **Rappels**
3. **Dénombrement**

## Domaines d'application

**Exemples**

- Intelligence artificielle.
- Médical.
- Astronomie.
- Finances.
- Des phénomènes où le résultat d'une observation n'est pas connu d'avance.

**Question**

D'autres exemples ?

# Premiers pas ! !

**Exemples**

- Un concept qui semblait être connu des grecs et égyptiens.
- Début de la théorie au milieu du XVII ème siècle.
- Premier intérêt pour les jeux (cartes, roulettes, etc.) et vite étendu à la science : physique, finances, informatique, etc.
- Le mot probable commence à remplacer le mot **chance**.
- Formalisme mathématique : Pascal, Bernoulli, Bayes, Laplace, Gauss, etc.

# Application 1


## Question

Comment optimiser ses chances de gagner ?

1. Calculer les probabilités.
2. Collecter des observations pour faire des statistiques.
3. IA : combiner probabilités et statistiques pour donner une réponse pertinente (**prédiction**).
4. Autres.

# Application 2


## Questions

Comment optimiser ses chances de gagner ?

Comment éviter les crises boursières ?

Est ce que le **risque** de se tromper est le même pour application 1 et application 2 ?

# Ensemble fini

## Cardinal

- On dira qu'un ensemble $E$ est fini lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.
- Le nombre d'éléments de $E$ est appelé le cardinal et il est noté $Card(E)$.
- Exemple : $E = \{0, 2, 4\}$ alors $Card(E) = 3$.
- Par convention l'ensemble vide noté $\emptyset$ ou $\{\}$ est un ensemble fini de cardinal $0$.

## Questions

- Est ce que votre classe est un ensemble fini ?
- Si oui, qu'il est son cardinal ?

# Ensemble des couples

## Produit

- Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis avec $Card(E) = n$ et $Card(F) = m$.
- Un élément $(a, b)$ avec $a \in E$ et $b \in F$ est appelé couple.
- L'ensemble $E \times F$ contient tous les couples $(a, b)$ avec $a \in E$ et $b \in F$.
- $Card(E \times F) = n \times m$
- En général, on appelle $k$-uplet l'élément $(a_1, \ldots, a_k)$ avec $k \in E_i$.

## Questions

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles finis.

- Donner l'ensembles des triplets $(a, b, c)$ avec $a \in E$, $b \in F$ et $c \in G$.
- Combien il y a d'éléments dans cet ensemble ?

## Exemples de couples

On lance deux dés à six faces.

### Questions

- Donner $E$ l'ensemble d'éléments pour le premier dé.
- Donner $F$ l'ensemble d'éléments pour le deuxième dé.
- Donner $3$ éléments de l'ensemble $G = E \times F$.
- Donner $Card(G)$
- Est ce que $G$ est différent de $F \times E$ ? Est ce vrai en général ?

# Notions pour les ensembles

On considère deux ensembles finis $A$ et $B$ et on rappelle les opérations suivantes :

## Opérations basiques

- $A \cup B$.
- $A \cap B$.
- $A \setminus B$ ou $A - B$.
- $\bar{A}$.
- $x \in A$.
- $A \subset B$.

## Question

Faites un schéma qui illustre deux ensemble $A$ et $B$ dont l'intersection n'est pas nulle et comparer $Card(A \cup B)$ avec $Card(A \cap B)$.

## Factorielle

Soit $n$ un nombre entier, on appelle factorielle de $n$ et on note le nombre $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... 2 \times 1$

### Exemple

- $1! = 1$
- $2! = 2 \times 1 = 2$
- $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$
- Par convention $0! = 1$

# Exemples de factorielles

## Questions

- Calculer $6!$
- Calculer $(6-2)!$
- Calculer $\frac{6!}{(6-2)!}$
- Comparer $5 \times 6$ avec $\frac{6!}{(6-2)!}$

## Arrangements

Nombre de possibilités de **ranger** $k$ objets parmi $n$ :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \ldots (n-k+1)$$

A noter que **l'ordre** est important.

### Exemple

- Supposons que nous avons deux objets $A$ et $B$, il y a $2$ façons de les ranger : $AB$ et $BA$
- Supposons que nous avons **trois boules** : **rouge**, **bleue** et **verte**. Il y a $3 \times 2$ possibilités de ranger $2$ dans l'ordre parmi $3$ : [rouge, bleue] ; [bleue, rouge] ; [rouge, verte] ; [verte,rouge] ; [bleu,verte] ;[verte,bleue].
- Combien de matchs aller-retour pour $3$ équipes ?

# Exemple : la taille d'un code secret

Un développeur informaticien a conçu un jeu en ligne. Le jeu nécessite une connexion avec un code composé de 3 chiffres impairs différents.

## Questions

- Donner les chiffres possibles pour former un seul code.
- Donner 3 exemples de codes différents.
- Combien de joueurs potentiels peuvent se connecter ?
- Si le concepteur décide que le code contient tous les chiffres impairs, quel serait le nombre de joueurs potentiels ?
- Sachant que l'hébergeur facture en fonction des connexions entrantes, faut-il augmenter la taille des codes ?

## Permutations

C'est un cas particulier des arrangement où $k = n$. c-à-d ranger $n$ objets parmi $n$ :

$$A_n^n = n!$$

### Exemple

- Supposons que nous avons deux objets $A$ et $B$, il y a 2 permutations possibles : $AB$ et $BA$
- Supposons que nous avons **trois boules** : **rouge**, **bleue** et **verte**. Il y a $3! = 6$ permutations possibles : [rouge, bleue, verte] ; [rouge, verte, bleue] ; [bleue, rouge, verte] ; [bleue, verte, rouge] ; [verte,rouge, bleue] ; [verte,bleue, rouge]

## Combinaisons

Choisir $k$ objets parmi $n$ sans tenir compte de l'ordre (contrairement à l'arrangement) :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

### Exemple

- $C_n^0 = C_n^n = 1$
- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$
- $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^1 + C_n^2 + \ldots C_n^n = 2^n$
- Supposons que nous avons **trois boules** : **rouge**, **bleue** et **verte**. Il y a 3 combinaisons possibles de 2 boules : [rouge, bleue] ; [rouge, verte, ] ; [bleue,verte]
- A noter que **[bleue,verte]** et **[verte, bleue]** représentent la même possibilité puisque l'ordre n'est pas important.

# Exemple : qui pour faire un entretien

Neuf candidats se présentent à un entretien pour un stage de fin d'études. Deux cadres les reçoivent. Le premier connu pour être très exigeant verra 5 candidats et le second 4.

## Questions

- Pourquoi l'expérience **entretien** (candidat, cadre) est aléatoire ?
- De combien de façons différentes les neuf candidats peuvent-elles être répartis entre cadres ?
- Sachant que parmi les candidats il y a 3 étudiants de l'IUT de Clermont, combien de possibilités pour que les trois évitent le premier cadre ?
- Deux étudiants IUT ont passé l'entretien avec le premier. Ils ne savent pas s'ils doivent le dire au troisième ou pas. Sans faire le calcul et si vous étiez le troisième, préféreriez le savoir ? Pourquoi ?

# L'ordre augmente ou diminue les possibilités ?

On suppose qu'on a un ensemble de 3 chiffres pairs $A = \{2, 4, 6\}$.

**Questions**

- Donner les **arrangements** de deux chiffres de $A$.
- Donner les **permutations** de deux chiffres de $A$.
- Donner les **combinaisons** de deux chiffres de $A$.
- Comparer les nombres obtenus.
- Conclure dans le cas général.