TP2 : Graphes vs. Courbes paramétrées

Ce TP explore deux types de représentations graphiques en 2D : d'une part les **graphes de fonction**, et d'autre part les **courbes paramétrées**. Le but est (1) de savoir les créer, et (2) de bien comprendre la distinction entre les deux.

Partie 1 – Graphes de fonctions

Étant donnée une fonction réelle $f(x)$, son **graphe** est la courbe du plan formée par tous les couples de coordonnées $(x, f(x))$, lorsque x parcourt la totalité de son domaine de définition.
Matplotlib permet facilement de représenter des graphes de fonction, et de travailler avec. L'idée est de créer une **discrétisation** du domaine de définition, c'est-à-dire un ensemble de valeurs "très resserrées" pour x, qui donneront une impression de continuité lorsqu'on tracera ensuite la courbe des points $(x, f(x))$.

Exercice 1 (Un premier graphe avec Matplotlib). Le but de ce premier exercice est de tracer le graphe de la fonction $\exp(x)$. Ouvrez le fichier

exo1_premier_graphe.py

et remplissez-le en suivant les instructions.

Exercice 2 (Modélisation, lecture dans un graphe). Un fabricant de processeurs cherche à évaluer la fabrication d'un nouveau composant. D'après ses premières estimations, voici le coût de production journalier (en euros) pour fabriquer n unités :

$$P(n) = 2000 + 60n^{2/3}.$$

Par ailleurs, chaque unité se vend 5 euros.
Le fabricant désire savoir *combien d'unités il doit fabriquer par jour, au minimum, afin d'être rentable*.
Pour répondre à cette question, ouvrez le fichier

exo2_modelisation.py

et remplissez-le en suivant les instructions.

Partie 2 – Courbes paramétrées

Une **courbe plane paramétrée** est un ensemble continu de points du plan, dont les coordonnées sont de la forme $\big(f(t), g(t)\big)$, pour un certain choix des fonctions $f(t)$ et $g(t)$.

- La variable t s'appelle le **paramètre** de la courbe. Elle prend ses valeurs dans un *intervalle* donné, qui peut être fini (ex : $t \in [0,1]$) ou infini (ex : $t \in]-\infty, +\infty[$) suivant les cas.
- La fonction $f(t)$ définit l'*abscisse* du point associé à chaque valeur du paramètre t.
- La fonction $g(t)$ définit l'*ordonnée* du point associé à chaque valeur du paramètre t.
- La courbe est obtenue en représentant les points associés à toutes les valeurs possibles de t.

Matplotlib permet facilement de représenter des courbes paramétrées. Ici encore, l'idée est de créer une **discrétisation**, c'est-à-dire un ensemble de valeurs "très resserées" pour le paramètre t, qui donneront une impression de continuité lorsqu'on tracera ensuite la courbe des points $(f(t), g(t))$.

Exercice 3 (équation paramétrique de parabole). Une **parabole** quelconque du plan peut être décrite par une équation paramétrique de la forme

$$(a + bt + ct^2, d + et + ft^2), \qquad t \in]-\infty, +\infty[$$

où a, b, c, d, e, f sont des coefficients réels fixés, qui définissent la taille et l'orientation de la parabole.

1. Créez un tableau numpy 'T' contenant une discrétisation du segment $[-4, 4]$ en 200 points.
2. Représentez dans une figure le segment de parabole d'équation

$$(2 - t + 2t^2, -3 - t - t^2), \qquad t \in [-4, 4]$$

   (Indice : utilisez le tableau créé à la question précédente.)

   Rajoutez également une grille de coordonnées, pour simplifier la lecture du graphe.
3. Dans la même figure, visualisez avec des marqueurs les points correspondant à un paramètre t de valeur entière : $t = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

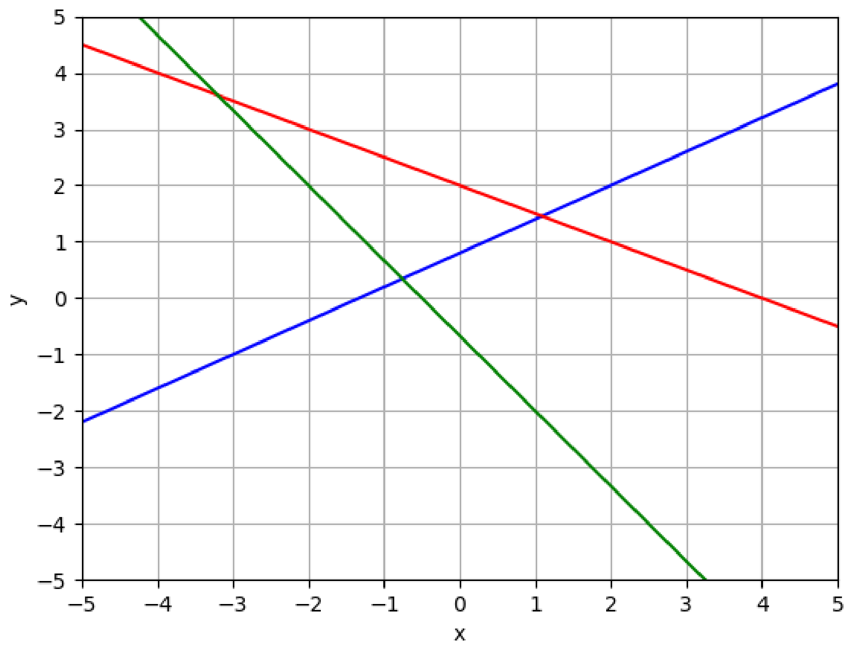
Exercice 4 (équation paramétrique de droite). Une droite quelconque du plan peut être décrite par une équation paramétrique de la forme

$$(a + bt, c + dt), \qquad t \in]-\infty, +\infty[$$

Le point $A = (a, c)$ correspond à un point donné sur la droite (celui obtenu pour $t = 0$). Le vecteur $\vec{v} = (b, d)$ constitue un **vecteur directeur** pour la droite.

1. Représentez dans une figure le segment de droite passant par le point $A = (-3, 1)$, de vecteur directeur $\vec{v} = (5, 3)$, pour le paramètre t allant de -3 à 3. Rajoutez également une grille de coordonnées, pour simplifier la lecture du graphe.
2. Dans la même figure, visualisez avec des marqueurs les points correspondant à un paramètre t de valeur entière : $t = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

3. Dans une nouvelle fenêtre, reproduisez *avec exactitude* la figure suivante :



Note : le code suivant vous sera utile pour la mise en forme finale :

```
plt.xlim([-5,5])              # impose les bornes en x
plt.ylim([-5,5])              # impose les bornes en y
ax = plt.gca()
ax.set_xticks(range(-5,6))    # impose des ticks tous les 1 en x
ax.set_yticks(range(-5,6))    # impose des ticks tous les 1 en y
```

Exercice 5 (Diverses courbes paramétrées sinusoïdales). Toutes les courbes paramétrées de cet exercice sont *périodiques*, basées sur les fonctions $\cos(t)$ et $\sin(t)$. Pour cette raison, deux valeurs du paramètre t et $t + 2\pi$ définissent exactement le même point. On peut donc se contenter de tracer les courbes sur le domaine $t \in [0, 2\pi]$.

1. Soient deux nombres entiers n et m. La **courbe de Lissajous** de coefficients (n, m) est donnée par l'équation paramétrique suivante :

$$\big(\cos(nt)\ ,\ \sin(mt)\big), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

   (a) Tracez la courbe de Lissajous de coefficients $(5, 4)$, puis $(7, 3)$, puis $(1, 1)$.

   (b) Tracez la courbe de Lissajous de coefficients $(10, 8)$. Que se passe-t-il et pourquoi ?

2. Tracez la **lemniscate de Bernoulli**, donnée par l'équation paramétrique

$$\left(\frac{\sin(t)}{1+\cos(t)^2}\ ,\ \frac{\sin(t)\cos(t)}{1+\cos(t)^2}\right), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

3. Tracez la **cardioïde**, donnée par l'équation paramétrique

$$\big(\cos(t)(1+\cos(t))\ ,\ \sin(t)(1+\cos(t))\big), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

4. Dans chacune des 3 figures créées, coupez l'intervalle $[0, 2\pi]$ en 16 segments égaux, et visualisez avec des marqueurs les 16 points associés sur la courbe.

Exercice 6 (Pour conclure).
En général, une courbe paramétrée est-elle un graphe ?
En général, un graphe est-il une courbe paramétrée ?