
Projet TP : chaîne de dominos

Objectifs

1. Simuler une expérience aléatoire en l'absence de formules.
2. Estimer la densité de probabilité d'une variable aléatoire, à partir de mesures expérimentales à l'aide d'un histogramme.
3. Estimer une moyenne, une variance, etc., à partir de plusieurs observations.
4. Calculer et interpréter une mesure de covariance.



Consignes

- Ce TP est prévu pour se dérouler sur 2 séances (TP3 +TP4).
- Il compte pour 25% de la note finale du cours.
- Soumission du travail : déposer le code Python bien documenté à la fin de chaque séance.
- Rendu final : le code Python fonctionnel + un rapport écrit de 2 pages environ. Il faut déposer un seul dossier nommé votre-nom-prénom-groupe. Le tout à compresser et à soumettre sur l'ENT avant la date limite.

Présentation du jeu

On construit une *chaîne de dominos* de la façon suivante :

- On dispose d'une pioche d'un jeu complet de dominos classiques.
- On tire le premier domino dans la pioche et on le pose sur le tapis. Il constitue le premier domino de la chaîne.
- On répète ensuite l'étape suivante **autant de fois que possible** :
 1. On tire le premier domino dans la pioche.
 2. Si possible, on le pose à l'un des deux bouts de la chaîne. Si les deux bouts sont possibles, on décide de l'un des deux au hasard.
 3. Sinon, on le repose à la fin de la pioche.
- On s'arrête lorsque plus aucun domino de la pioche ne peut être posé dans la chaîne.

Lorsque le jeu est fini, on considère deux variables aléatoires d'intérêt :

1. La variable X = nombre de dominos posés dans la chaîne.
2. La variable Y = nombre de points restants dans la pioche (les 'points' de chaque domino restant correspondant à la somme de ses deux nombres).

Le but de ce TP est d'étudier (empiriquement) la loi de probabilités des variables X et Y .

Exercice 1 (Prise en main).

1. Combien y a-t'il de dominos dans un jeu classique ?
2. Pourquoi est-il possible que le jeu s'arrête sans avoir posé tous les dominos ?
3. Pourquoi X et Y sont des variables aléatoires ?

Exercice 2 (Simulation d'une partie).

Écrire une fonction Python qui simule **une** réalisation du jeu, et renvoie les valeurs de X et Y .

```
1 def une_chaine_domino():
2     ...     # à vous (nombreuses lignes !)
3     return X, Y
```

Remarques : nous listons ci-dessous quelques questions que vous allez devoir vous poser afin d'implémenter le déroulement du jeu. **Vous n'avez pas à répondre à ces questions**, simplement à y réfléchir en écrivant votre fonction.

- Quelle structure de données pour représenter la pioche de dominos restants ?
- Quelle structure de données pour représenter la chaîne de dominos déjà construite ? (Sachant qu'il suffit de considérer l'information pertinente pour le déroulement du jeu.)
- Comment savoir si le jeu est fini ?
- Est-il éventuellement utile d'écrire certaines sous-fonctions, afin de clarifier le code ?

Exercice 3 (Analyse probabiliste).

Simulez un grand nombre de réalisations du jeu (au moins 10000). Puis, à l'aide des méthodes déjà vues en cours et en TP :

1. Estimer et représenter la loi de probabilité de la variable X .
2. Calculer et tracer la fonction de répartition de X .
3. Estimer l'espérance de X .
4. Estimer la variance de X .
5. Mêmes questions pour la variable Y .
6. Estimer la *probabilité de succès* au jeu, c'est-à-dire, la probabilité de parvenir à placer tous les dominos dans la chaîne.
7. Estimer le nombre médian de points restants dans la pioche.

Exercice 4 (Covariance et corrélation).

1. Effectuer 200 réalisations du jeu et représenter les valeurs correspondantes de X et Y sous la forme d'un nuage de points (avec un point (x, y) pour chaque réalisation de X et Y observée). Interprétez le résultat.
2. On définit le nombre $Z = X \times Y$ comme le produit entre X et Y . Expliquer pourquoi Z est une variable aléatoire.
3. Estimer l'espérance de X , Y et Z . Vérifier et justifier si X et Y sont indépendants.
4. Estimer la covariance des variables X et Y , puis leur coefficient de corrélation. Commenter.