TP4 : Interpolation polynômiale

Le terme **interpolation polynômiale** désigne un ensemble de méthodes dans lesquelles on utilise des *points de contrôle* afin de définir le tracé d'une courbe polynômiale. Ces méthodes sont très utilisées en pratique, par exemple en ingénierie (définition de profils de pièces), en infographie (outil de tracé de courbe), etc.
Ce TP explore deux types possibles d'interpolation polynômiale. En partie 1, l'*interpolation polynômiale de Lagrange* : par tout ensemble de N points cibles, il passe un unique polynôme de degré $N-1$. En partie 2, l'*interpolation polynômiale d'Hermite*, qui permet de reproduire non seulement des valeurs cibles pour le polynôme, mais aussi pour sa dérivée (tangentes).
Ce TP est prévu pour se dérouler sur 2 séances de 2 heures ; en gros, une séance pour chaque partie.

1 Interpolation polynômiale de Lagrange

Le résultat suivant est très célèbre :

Théorème 1 (Interpolation de Lagrange en 1D). *Soient N valeurs réelles deux à deux distinctes*

$$t_1, \dots, t_N$$

et soient N valeurs réelles "cibles" quelconques

$$y_1, \dots, y_N$$

Alors il existe un unique *polynôme $P(X)$ de degré $N-1$ qui* interpole *les valeurs (t_i, y_i), c'est-à-dire qui vérifie*

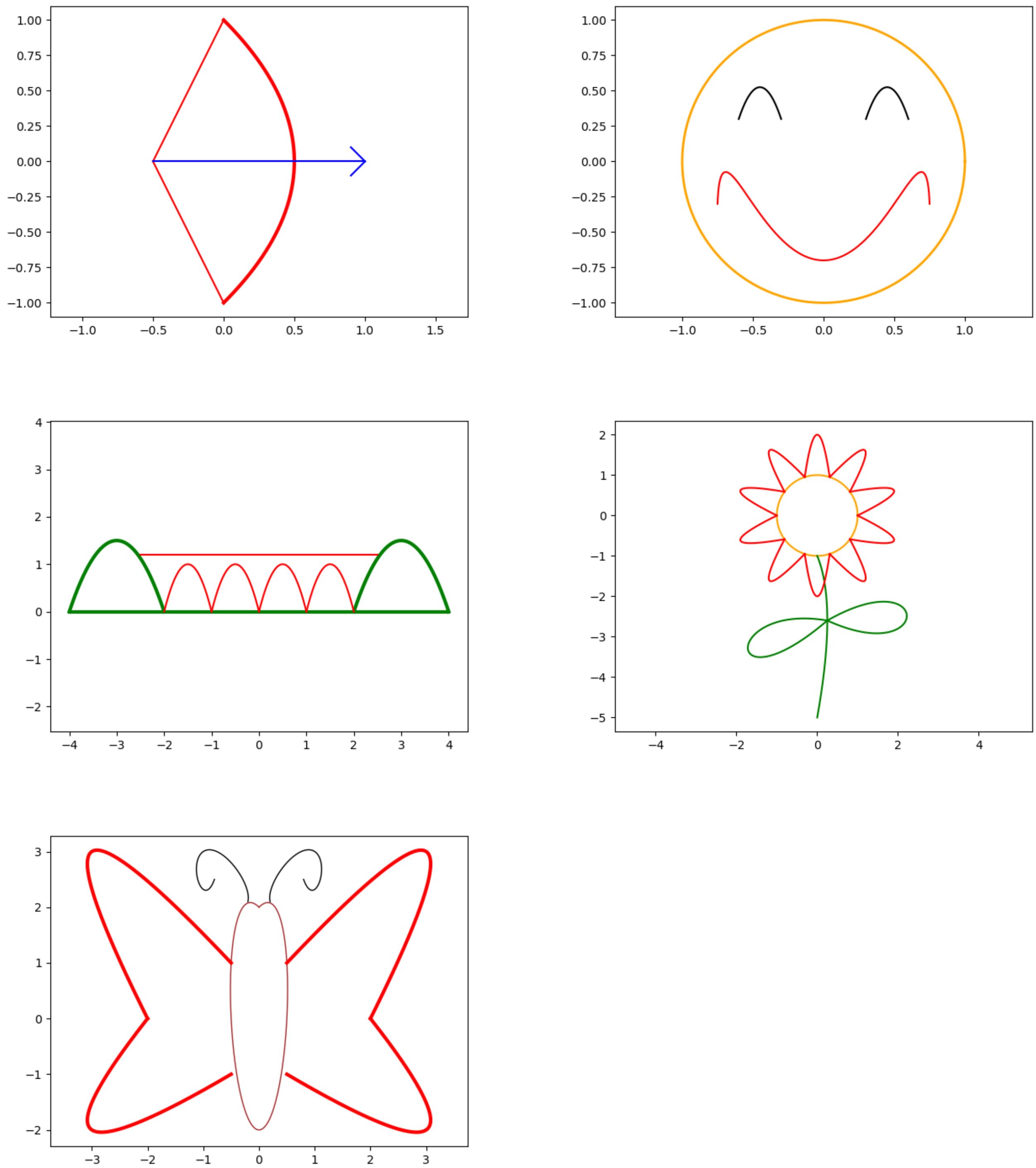
$$\begin{aligned} P(t_1) &= y_1 \\ P(t_2) &= y_2 \\ &\vdots \\ P(t_N) &= y_N \end{aligned}$$

La preuve de ce théorème (que nous ne verrons pas dans sa totalité) repose sur la théorie des matrices et des systèmes linéaires.

Dans ce TP, vous allez étudier les applications concrètes de ce théorème.

- L'exercice 1 est introductif, il montre comment utiliser Numpy pour résoudre un système linéaire.
- L'exercice 2 expose l'*interpolation polynômiale* basique, en 1D.
- L'exercice 3 expose l'interpolation polynômiale en 2D, et son application en infographie. À la fin de cet exercice, il vous sera proposé de **reproduire une des figures suivantes** (celle que vous voulez – vous pouvez aussi plutôt inventer une figure vous-même !)

Exemples de figures à recréer



2 Interpolation polynômiale d'Hermite

Cette interpolation vise à reproduire, non seulement des valeurs cibles pour le polynôme, mais aussi pour sa dérivée (tangentes). Le résultat théorique s'énonce ainsi :

Théorème 2 (Interpolation d'Hermite en 1D). *Soient N valeurs réelles deux à deux distinctes,*

$$t_1, \dots, t_N$$

et soient $2N$ valeurs réelles "cibles" quelconques

$$y_1, \dots, y_N \quad \text{et} \quad d_1, \dots, d_N$$

Alors il existe un unique *polynôme $P(X)$ de degré $2N-1$ qui interpole les valeurs (t_i, y_i)* avec des dérivées imposées d_i, *c'est-à-dire qui vérifie*

$$\begin{array}{ccc} P(t_1) = y_1 & \text{et} & P'(t_1) = d_1 \\ P(t_2) = y_2 & \text{et} & P'(t_2) = d_2 \\ \vdots & & \\ P(t_N) = y_N & \text{et} & P'(t_N) = d_N \end{array}$$

La preuve de ce théorème, encore une fois, repose sur la théorie des matrices et des systèmes linéaires.

- L'exercice 4 illustre l'*interpolation polynômiale d'Hermite* en 1D.
- L'exercice 5 illustre l'*interpolation polynômiale d'Hermite* en 2D. Cette technique offre une méthode concrète pour construire une courbe avec des points de passage *et des directions* imposées, comme illustré page suivante.

Exemples d'interpolation d'Hermite en 2D

Problème $\rightarrow$ Interpolation