Variables aléatoires continues
(Probabilités et statistiques)

A. Fradi, A. Khaldi, C. Samir, A. Wohrer

Université d'Auvergne

Clermont-Ferrand Aurillac Le Puy-en-Velay

2A - IUT Info

Année 2023-2024

Avant de commencer

- Pour toutes questions sur le cours :

  anis.fradi@uca.fr
  abderrahmane.khaldi@ext.uca.fr
  chafik.samir@uca.fr
  adrien.wohrer@uca.fr

- Les transparents du cours et d'autres documents sont disponibles sur l'ENT.

Plan du cours aujourd’hui

1. **Variable aléatoire continue**
2. **Exemple : poids des bébés à la naissance**
3. **Variable aléatoire continue**
4. **Loi uniforme**

Poids d'un bébé à la naissance (en France en 2016)

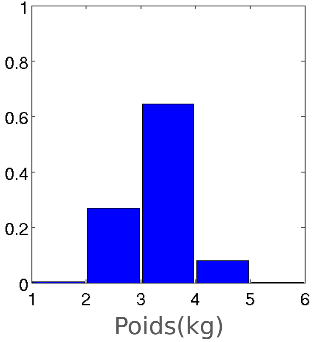
- Soit un large échantillon de bébés, nés en France au cours des 5 dernières années (disons, 10 000 bébés). On veut construire l'histogramme de leur poids à la naissance.

- Problème : l'aspect de l'histogramme va changer suivant la précision (nombre de chiffres après la virgule) utilisée.

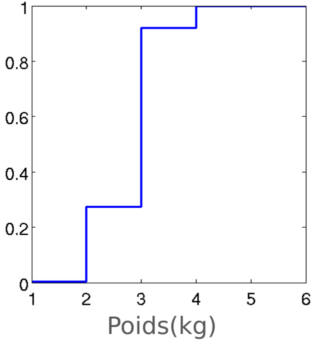
Poids d'un bébé à la naissance (en France en 2016)

Version 1 : On s'intéresse juste au chiffre des kilos

Fonction de masse p_i



Fonction de répartition $F(x)$



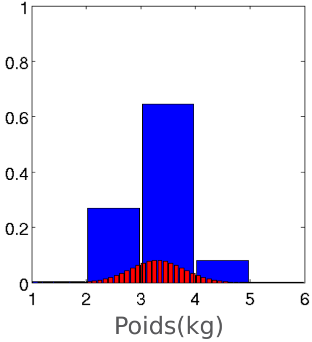
$\sum_i p_i = 1$

$F(x) = P(X \leq x)$

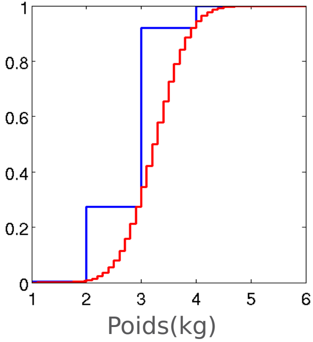
Poids d'un bébé à la naissance (en France en 2016)

Version 2 : Le chiffre des kilos et une décimale

Fonction de masse p_i



Fonction de répartition $F(x)$



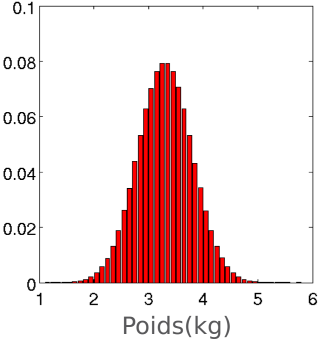
$\sum_i p_i = 1$

$F(x) = P(X \leq x)$

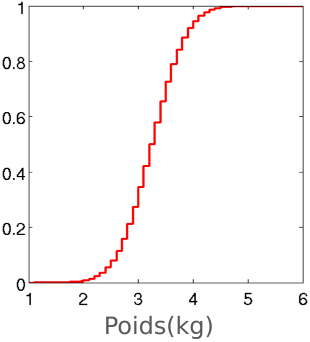
Poids d'un bébé à la naissance (en France en 2016)

Version 2 : Le chiffre des kilos et une décimale

Fonction de masse p_i



Fonction de répartition $F(x)$



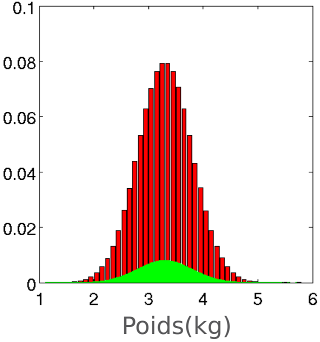
$\sum_i p_i = 1$

$F(x) = P(X \leq x)$

Poids d'un bébé à la naissance (en France en 2016)

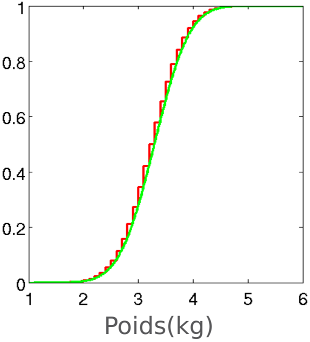
Version 3 : Le chiffre des kilos et deux décimales

Fonction de masse p_i



$\sum_i p_i = 1$

Fonction de répartition $F(x)$

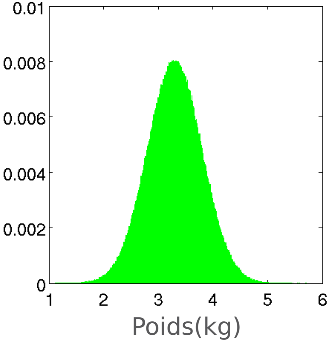


$F(x) = P(X \leq x)$

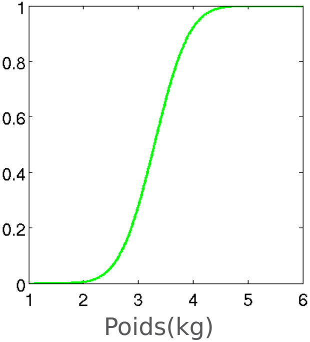
Poids d’un bébé à la naissance (en France en 2016)

Version 3 : Le chiffre des kilos et deux décimales

Fonction de masse p_i



Fonction de répartition $F(x)$



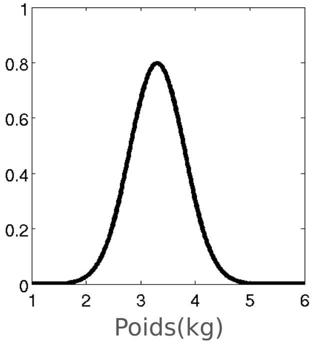
$\sum_i p_i = 1$

$F(x) = P(X \leq x)$

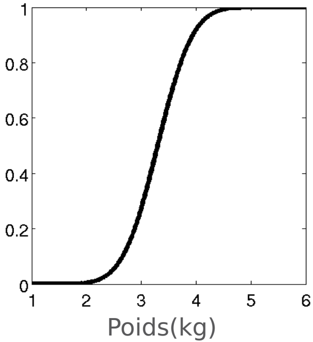
Densité de probabilité

La **densité de probabilité** est proportionnelle à la fonction de masse. Mais au lieu de la somme des barres, c'est maintenant l'aire sous les barres qui doit être égale à 1.

Densité de probabilité



Fonction de répartition $F(x)$



Aire totale = 1

$F(x)$ = aire jusqu'à x

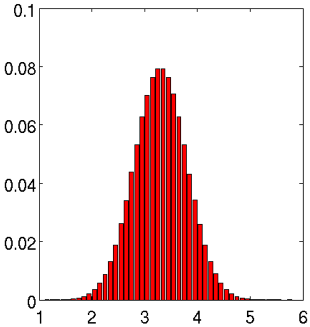
Utiliser la densité de probabilité

Probabilité qu'un bébé fasse entre 3.4 kg et 3.9 kg ?

Utiliser la densité de probabilité

Probabilité qu'un bébé fasse entre 3.4 kg et 3.9 kg ?

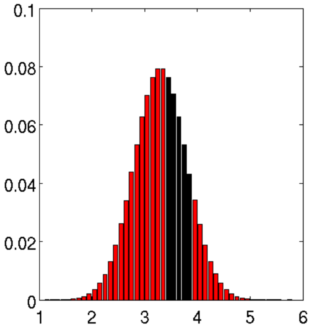
Calcul avec une variable discrète :



Utiliser la densité de probabilité

Probabilité qu'un bébé fasse entre 3.4 kg et 3.9 kg ?

Calcul avec une variable discrète :



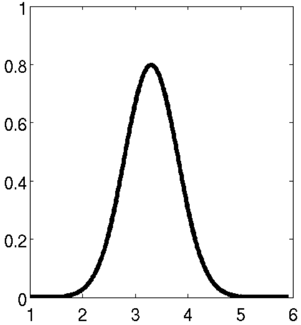
On fait la **somme** des probabilités pour la propriété requise :

$$P(X \in [3.4 ; 3.9]) = \sum_{x=3.4}^{3.9} p_x$$

Utiliser la densité de probabilité

Probabilité qu'un bébé fasse entre 3.4 kg et 3.9 kg ?

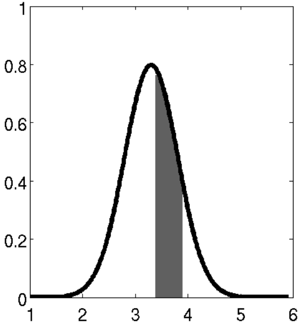
Calcul avec une variable continue :



Utiliser la densité de probabilité

Probabilité qu'un bébé fasse entre 3.4 kg et 3.9 kg ?

Calcul avec une variable continue :



On calcule l'**aire** pour la propriété requise :

$$P(X \in [3.4; 3.9]) = \int_{x=3.4}^{3.9} f(x)\mathrm{d}x$$

La seule différence

Vous allez voir que toutes les formules marchent exactement de la même façon que pour les variables aléatoires discrètes (semaine précédente) :

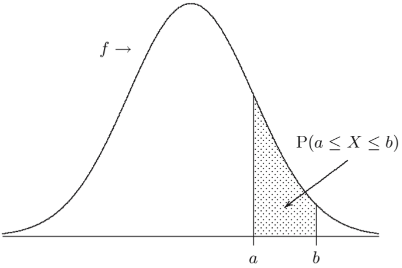
- Probabilité que la variable prenne certaines valeurs...
- Utiliser la fonction de répartition...
- Calculer une espérance et une variance...

En fait, la différence entre les deux est purement formelle :

[⋆] Slogan [⋆]

Pour les variables continues, on remplace les **sommes** par des **intégrales**.

Variable aléatoire continue



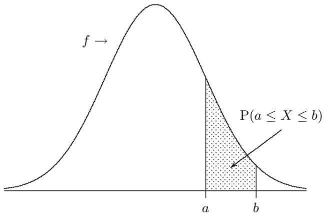
Définition [⋆⋆]

Une variable aléatoire X est dite **continue** s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout intervalle réel $[a, b]$:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

La fonction f s'appelle la **densité de probabilité** de X.

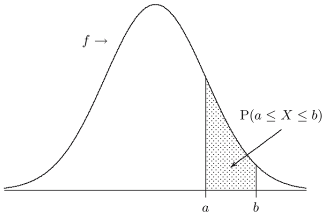
Premières propriétés



Propriétés (densité de probabilité)

- Positivité : Pour tout x, $f(x) \geq 0$.
- Normalisation : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Premières propriétés



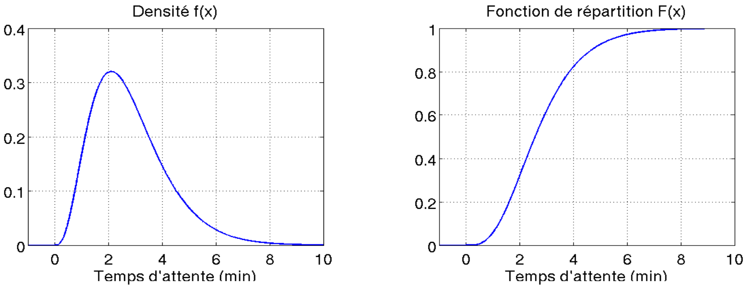
Propriétés (densité de probabilité)

- Positivité : Pour tout x, $f(x) \geq 0$.
- Normalisation : $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Rappel : pour une variable discrète

- Positivité : Pour tout i, $P(i) \geq 0$.
- Normalisation : $\sum_i P(i) = 1$.

Fonction de répartition

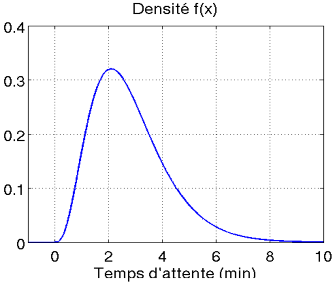


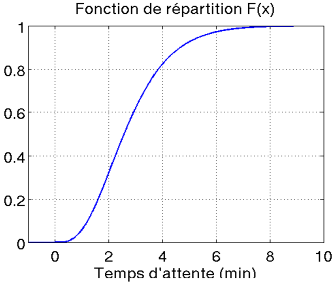
Définition [⋆]

Soit X une v.a. continue. Sa **fonction de répartition** $F(x)$ est définie exactement comme dans le cas discret, c'est-à-dire :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

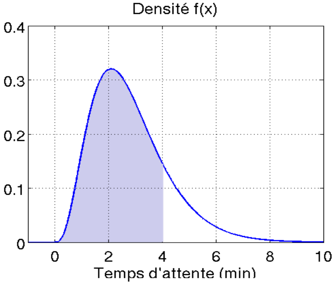
Fonction de répartition

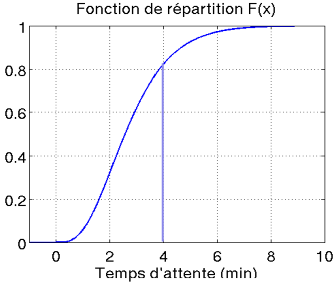




X = Temps d'attente entre deux tramways.
Probabilité qu'il y ait moins de 4 minutes entre les deux ?

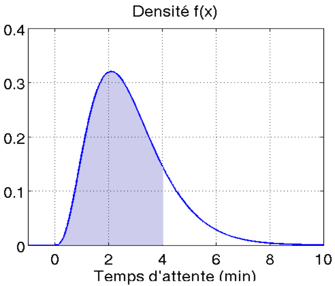
Fonction de répartition

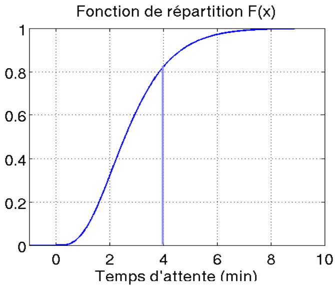




X = Temps d'attente entre deux tramways.
Probabilité qu'il y ait moins de 4 minutes entre les deux ?

Fonction de répartition

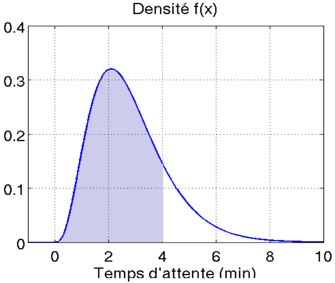


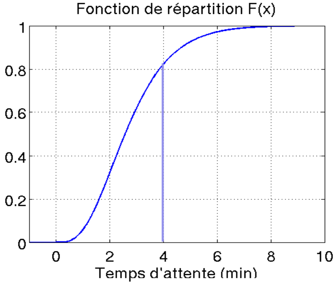


X = Temps d'attente entre deux tramways.
Probabilité qu'il y ait moins de 4 minutes entre les deux ?

$$F(4) = P(X \leq 4)$$
$$= P(-\infty \leq X \leq 4)$$
$$= \int_{-\infty}^{4} f(x)\mathrm{d}x.$$

Fonction de répartition



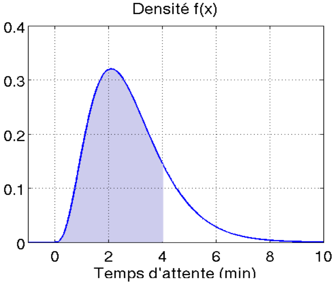


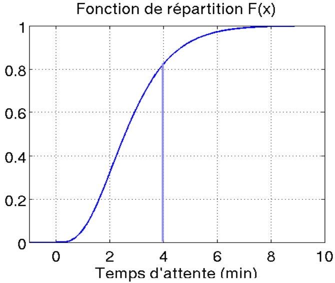
Propriété [⋆⋆]

Soit X une v.a. continue de densité f. Soit F sa fonction de répartition. Alors on a :

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{ou autrement dit :} \qquad f(x) = F'(x)$$

Fonction de répartition





Propriété [⋆⋆]

Soit X une v.a. continue de densité f. Soit F sa fonction de répartition. Alors on a :

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{ou autrement dit :} \qquad f(x) = F'(x)$$

(Comme avant, en remplaçant les **sommes** par des **intégrales** !)

Espérance, variance

Définition

Soit X une v.a. continue de densité f. On définit les deux quantités suivantes :

1. L'**espérance** de X : $$E[X] = \int_x x f(x) \mathrm{d}x.$$
2. La **variance** de X : $$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Espérance, variance

Définition

Soit X une v.a. continue de densité f. On définit les deux quantités suivantes :

1. L'**espérance** de X : $$E[X] = \int_{\mathcal{X}} x f(x) \mathrm{d}x.$$
2. La **variance** de X : $$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

(Comme avant, en remplaçant les **sommes** par des **intégrales** !)

Espérance, variance

Définition

Soit X une v.a. continue de densité f. On définit les deux quantités suivantes :

1. L'**espérance** de X : $E[X] = \int_x x f(x) \mathrm{d}x.$
2. La **variance** de X : $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$

(Comme avant, en remplaçant les **sommes** par des **intégrales** !)

Remarques

- Pour certaines variables aléatoires continues, il est possible que l'espérance n'existe pas (elle est « infinie »).

Espérance, variance

Définition

Soit X une v.a. continue de densité f. On définit les deux quantités suivantes :

1. L'**espérance** de X : $$E[X] = \int_x xf(x)\mathrm{d}x.$$
2. La **variance** de X : $$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

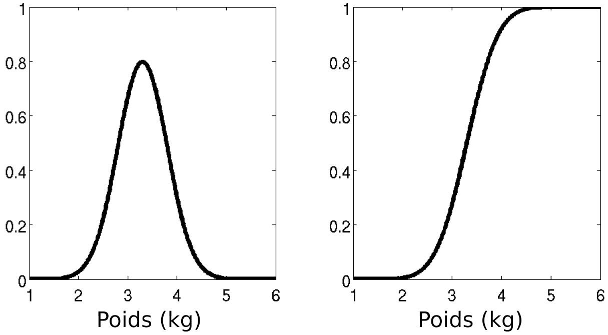
(Comme avant, en remplaçant les **sommes** par des **intégrales** !)

Remarques

- Pour certaines variables aléatoires continues, il est possible que l'espérance n'existe pas (elle est « infinie »).
- Pour vous entraîner : Donnez la formule de $E[X^2]$.

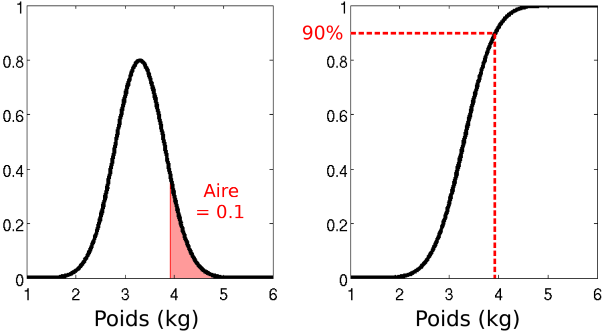
Quantiles : exemple

Trouvez le 90-ème pourcentile, pour la distribution des poids de bébé à la naissance.



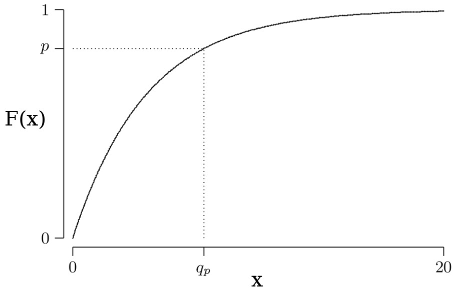
Quantiles : exemple

Trouvez le 90-ème pourcentile, pour la distribution des poids de bébé à la naissance.



On lit $q_{0.9} \simeq 3.9$ kg.

Quantiles : définition

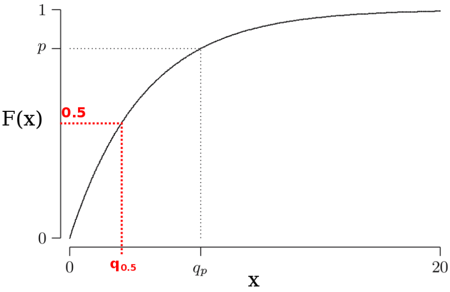


Définition

Soit p un nombre entre 0 et 1. On appelle p**-ème quantile** de X le nombre q_p tel que $P(X \leq q_p) = p$. C'est-à-dire, tel que :

$$F(q_p) = p.$$

Quantiles : définition



Définition

Soit p un nombre entre 0 et 1. On appelle **p-ème quantile** de X le nombre q_p tel que $P(X \leq q_p) = p$. C'est-à-dire, tel que :

$$F(q_p) = p.$$

Quand $p = 0.5$, le point $q_{0.5}$ est appellé la **médiane**.

Loi uniforme

On tire un point au hasard sur le segment $[a, b]$.

Loi uniforme

On tire un point au hasard sur le segment $[a, b]$.

Exemples

- Quelle heure est-il (avec précision infinie) ? $X \sim U(0, 24)$.
- Je rentre de 20 minutes de marche. A quel moment de ma promenade ai-je perdu le téléphone ? $X \sim U(0, 1/3)$.

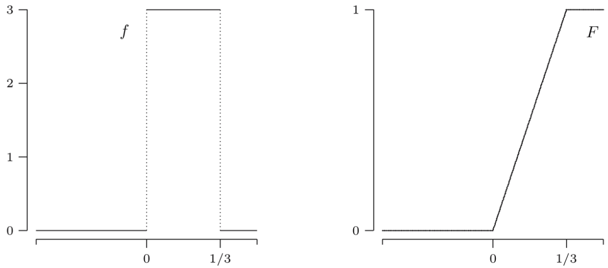
Loi uniforme

On tire un point au hasard sur le segment $[a, b]$.

Exemples

- Quelle heure est-il (avec précision infinie) ? $X \sim U(0, 24)$.
- Je rentre de 20 minutes de marche. A quel moment de ma promenade ai-je perdu le téléphone ? $X \sim U(0, 1/3)$.

$U(0, \frac{1}{3})$



Loi uniforme

On tire un point au hasard sur le segment $[a, b]$.

Définition

Soit un segment réel $[a, b]$. On dit que X suit une **loi uniforme** sur $[a, b]$, et on note $X \sim U(a, b)$, lorsque :

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{pour } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Loi uniforme

On tire un point au hasard sur le segment $[a, b]$.

Définition

Soit un segment réel $[a, b]$. On dit que X suit une **loi uniforme** sur $[a, b]$, et on note $X \sim U(a, b)$, lorsque :

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{pour } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Propriétés

- $E[X] = (a+b)/2$
- $V[X] = (b-a)^2/12$