TP3 : Dériver une courbe paramétrée

Dans ce TP, nous voyons comment appliquer le concept d'*approximation affine* au cas des courbes paramétrées, et comment la visualiser concrètement à l'aide de flèches.

Approximation affine pour une courbe paramétrée

Soit une courbe paramétrée de paramètre t, de la forme

$$\text{Point}(t) = (f(t), g(t))$$

où f et g sont les deux fonctions de coordonnées de la courbe (qu'on suppose dérivables).
On se place au point Point(t) de la courbe, et on considère une petite modification $t+h$ du paramètre, avec h proche de zéro. On a alors

$$\begin{aligned} f(t+h) &\simeq f(t) + h.f'(t) && \text{(en abscisses)} \\ g(t+h) &\simeq g(t) + h.g'(t) && \text{(en ordonnées)} \end{aligned}$$

Le terme de dérivée correspond donc à une 'flèche' (=vecteur) $\vec{v}(t)$, de coordonnées :

$$\vec{v}(t) = (f'(t), g'(t))$$

et l'approximation affine peut s'écrire, de manière plus compacte :

$$\text{Point}(t+h) \simeq \text{Point(t)} + h.\vec{v}(t)$$

Pour **visualiser** cette approximation affine, il suffit de fixer une valeur de h (ni trop petite ni trop grande) et de tracer la flèche $\boxed{h.\vec{v}(t)}$, depuis le point Point(t).

Exercice 1 (compréhension, sur papier). On considère la courbe paramétrée d'équation

$$\text{Point}(t) = (\ 6t^3 - 18t^2 + 13t + 5\ ,\ 4t^3 + 6t^2 - 25t + 13\ ) \qquad \text{pour } t \in [0, 2]$$

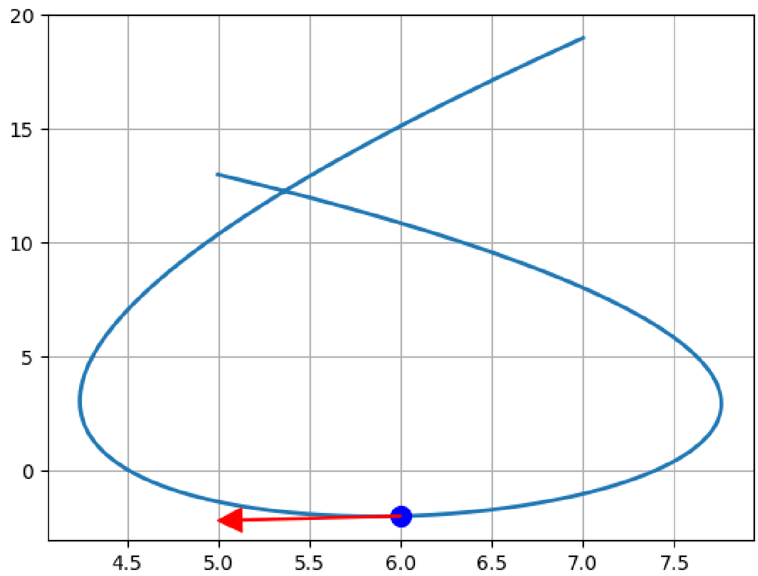
1. Calculez les coordonnées des points Point(0), Point(1), Point(2).
2. Trouvez l'expression de sa fonction dérivée $\vec{v}(t)$, comme expliqué ci-dessus. (Il y a donc *deux* fonctions dérivées à calculer, celle en abscisses et celle en ordonnées.)

3. Déduisez-en l'approximation affine à cette courbe au point $t = 1$, sous la forme

$$\text{Point}(1 + \text{h}) \simeq (\boxed{?} + \boxed{?}h \, , \, \boxed{?} + \boxed{?}h)$$

où vous devez trouver les 4 nombres manquants.

4. Ci-dessous, on a tracé la courbe paramétrée en question, ainsi que son approximation affine au point de coordonnée $t = 1$.
   (a) Vérifiez que ce graphique est cohérent avec vos calculs des questions précédentes.
   (b) La flèche rouge représente le vecteur $\boxed{h.\vec{v}(1)}$, pour une certaine valeur de h. En vous basant sur la question 3, pouvez-vous retrouver quelle valeur de h a été utilisée ici ?



Exercice 2 (Une première courbe avec ses approximations affines)**.** Le but de cet exercice est de mettre en place la représentation d'une courbe paramétrée (comme au TP2) mais aussi les flèches représentant ses approximations affines (la nouveauté de ce TP). Ouvrez le fichier

TP3_exo2.py

et remplissez-le en suivant les instructions.

Exercice 3 (D'autres courbes et leurs approximations affines)**.** Reprenez maintenant les courbes tracées au TP2, et appliquez-leur le même traitement qu'à l'exercice précédent, afin de visualiser leurs *approximations affines* en différents points. Attention : ceci implique que vous devrez calculer (sur papier) la formule donnant la dérivée des deux fonctions de coordonnées de chaque courbe !

1. La parabole correspondant à l'exercice 3 du TP2. Marquez chacun des points de la courbe associé à un paramètre t de valeur entière, puis ajoutez des flèches rouges pour visualiser l'approximation affine à la parabole en chacun de ces points.

2. Les *graphes* tracés aux exercices 1 et 2 du TP2, en les voyant comme des cas particuliers de courbes paramétrées. Quel est le *paramètre* de la courbe dans ces exemples ? Que valent les deux fonctions de coordonnées (celle des abscisses et celle des ordonnées) ?
3. Les courbes sinusoïdales introduites au dernier exercice du TP2. Pour chaque courbe, définissez 16 points répartis uniformément dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, et représentez l'approximation affine en chacun de ces points.