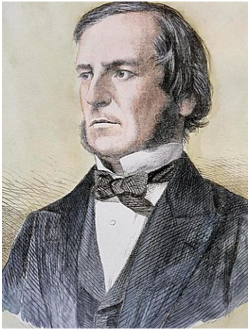
Fonctions et expressions booléennes

1A - BUT Info - UCA

Bases Mathématiques 1

George Boole (1815-1864)



Algèbre de Boole

booléen = qui ne peut prendre que deux valeurs différentes

Utilisations en informatique

Modélisation et calcul

- Circuits électroniques
- Applications industrielles
- Intelligence artificielle
- Vérification de programmes
- Preuves de programmes
- Etc.

Plan du cours

Fonctions booléennes

Expressions booléennes

Calcul booléen

Formes normales

Plan du cours

Fonctions booléennes

Expressions booléennes

Calcul booléen

Formes normales

Variables booléennes et fonctions booléennes

- L'ensemble $\mathcal{B}$ des booléens est composé de deux éléments : 0 et 1, `faux` et `vrai`, *False* et *True*, $\perp$ et $\top$, etc.
- Une variable booléenne prend ses valeurs dans $\mathcal{B}$
- Une fonction booléenne prend en entrée une ou des valeur(s) booléenne(s) et les transforme en une valeur booléenne :

$$f : \mathcal{B}^n \longrightarrow \mathcal{B}$$

Table de vérité d'une fonction booléenne

$$f : \mathcal{B}^3 \longrightarrow \mathcal{B}$$

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$f(0,1,1) = 1$ $\qquad$ $f(1,0,1) = 0$

Lien avec la théorie des ensembles

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$V = \{x, y, z\}$$

$$\mathcal{P}(V) = \{\{\}, \{z\}, \{y\}, \{y,z\}, \{x\}, \{x,z\}, \{x,y\}, \{x,y,z\}\}$$

$$f = \{\{\}, \{z\}, \{y,z\}, \{x,y\}\}$$

$$f \subseteq \mathcal{P}(V)$$

Conjonction

$$\mathcal{B}^2 \longrightarrow \mathcal{B}$$

Notation : xy, parfois $x \cdot y$

x	y	xy
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

xy vaut 1 lorsque x et y valent 1 tous les deux

Disjonction

$$\mathcal{B}^2 \longrightarrow \mathcal{B}$$

Notation : $x + y$

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$x + y$ vaut 1 lorsque x ou y vaut 1 (ou les deux)

Piège : en calcul booléen $1 + 1 = 1$

Négation

$$\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$$

Notation : $\overline{x}$

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

$\overline{x}$ vaut le contraire de x

Plan du cours

Fonctions booléennes

Expressions booléennes

Calcul booléen

Formes normales

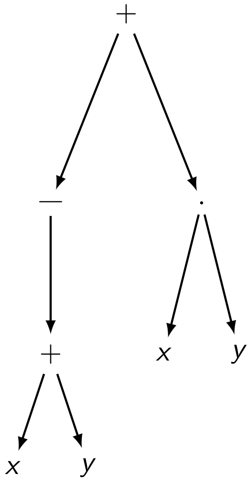
Opérateurs booléens et expressions booléennes

- Opérateurs booléens : conjonction, disjonction, négation (et d'autres, voir TD)
- Expression booléenne : combinaison de variables booléennes à l'aide d'opérateurs booléens

$$\overline{x+y}+xy$$

Arbre syntaxique

$$\overline{x+y}+xy$$



Calcul de la table de vérité d'une expression booléenne

$$\overline{x+y}+xy$$

x	y	$x+y$	$\overline{x+y}$	xy	$\overline{x+y}+xy$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1

Toute expression booléenne représente une fonction booléenne

Minterme

Une seule fois la valeur 1

x	y	z	$\overline{x}\,y\,z$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$$\overline{x}\,y\,z$$

Somme de mintermes

x	y	z	$f(x,y,z)$	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{x}\,\overline{y}\,z$	$\overline{x}\,y\,z$	$x\,y\,\overline{z}$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0

$$f(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,y\,z + x\,y\,\overline{z}$$

Toute fonction booléenne peut être représentée par une (des) expression(s) booléenne(s)

(remarque : fonctions nulles)

Piège !

x	y	z	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

x	y	z	$\overline{xyz}$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Plan du cours

Fonctions booléennes

Expressions booléennes

Calcul booléen

Formes normales

Plusieurs expressions pour une même fonction

x	y	$\overline{x+y}+xy$	$\overline{x}\,\overline{y}+xy$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Comment passer de l'une à l'autre ?

Calcul booléen

Des règles de calcul peu surprenantes

- Commutativités de la disjonction et de la conjonction

$A + B = B + A$
$AB = BA$

- Associativités de la disjonction et de la conjonction

$(A + B) + C = A + (B + C)$
$(AB)C = A(BC)$

- Élements neutres de la disjonction et de la conjonction

$A + 0 = A$
$A1 = A$

- Involutivité de la négation

$$\boxed{\overline{\overline{A}} = A}$$

- Négation des constantes

$\overline{0} = 1$
$\overline{1} = 0$

D'autres qui le sont un peu plus

- Distributivités

$A(B+C) = AB + AC$
$A + BC = (A+B)(A+C)$

- Éléments absorbants

$A + 1 = 1$
$A.0 = 0$

- Idempotences

$A + A = A$
$AA = A$

- Tiers-exclu

$$\boxed{A + \overline{A} = 1}$$

- Non-contradiction

$$\boxed{A\overline{A} = 0}$$

$$A + BC = (A + B)(A + C)$$

A	B	C	BC	$A + BC$	$A + B$	$A + C$	$(A + B)(A + C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Lois de De Morgan

- Négation d'une disjonction

$$\boxed{\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}}$$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A+B$	$\overline{A+B}$	$\overline{A}\,\overline{B}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

- Négation d'une conjonction

$$\boxed{\overline{AB} = \overline{A}+\overline{B}}$$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	AB	$\overline{AB}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Calculer avec des expressions booléennes

Montrer que $x + xy = x$

$$
\begin{aligned}
x + xy &= x1 + xy \\
&= x(1 + y) \\
&= x1 \\
&= x
\end{aligned}
$$

Montrer que $x(x + y) = x$

$$
\begin{aligned}
x(x + y) &= (x + 0)(x + y) \\
&= x + (0y) \\
&= x + 0 \\
&= x
\end{aligned}
$$

$A + BC = (A + B)(A + C)$

Plan du cours

Fonctions booléennes

Expressions booléennes

Calcul booléen

Formes normales

Rappel : Mintermes et sommes de mintermes

x	y	z	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$	$f(x,y,z)$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0

$$f(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,y\,z + x\,y\,\overline{z}$$

Maxterme

Une seule fois la valeur 0

x	y	z	
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Expression d'un maxterme

x	y	z	$\overline{\overline{x}\,y\,z}$	$\overline{x}\,y\,z$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Négation d'un minterme

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{x}\,y\,z} &= \\
&= \overline{\overline{x}} + \overline{y} + \overline{z} \\
&= x + \overline{y} + \overline{z}
\end{aligned}$$

Produit de maxtermes

x	y	z	$f(x,y,z)$	$\overline{f(x,y,z)}$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

$$\overline{f(x,y,z)} = \overline{x}y\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + x\overline{y}z + xyz$$

$$f(x,y,z) = (x+\overline{y}+z)(\overline{x}+y+z)(\overline{x}+y+\overline{z})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})$$

Forme normale disjonctive (DNF)

Disjonction de conjonctions (somme de produits)

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

- somme de mintermes

$$f(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,y\,z + x\,y\,\overline{z}$$

- mais aussi

$$f(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,y\,z + x\,y\,\overline{z}$$

En effet

$$
\begin{aligned}
\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,z &= \overline{x}\,\overline{y}(\overline{z} + z) \\
&= \overline{x}\,\overline{y}1 \\
&= \overline{x}\,\overline{y}
\end{aligned}
$$

Forme normale conjonctive (CNF)

Conjonction de disjonctions (produit de sommes)

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

- produit de maxtermes

$$f(x,y,z) = (x+\overline{y}+z)(\overline{x}+y+z)(\overline{x}+y+\overline{z})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})$$

- mais aussi

$$f(x,y,z) = (x+\overline{y}+z)(\overline{x}+y)(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})$$

En effet

$$
\begin{aligned}
(\overline{x} + y + z)(\overline{x} + y + \overline{z}) &= ((\overline{x} + y) + z)((\overline{x} + y) + \overline{z}) \\
&= (\overline{x} + y) + z\overline{z} \\
&= \overline{x} + y + 0 \\
&= \overline{x} + y
\end{aligned}
$$

$(A + B)(A + C) = A + BC$

FIN