Variables aléatoires continues (suite)
(Probabilités et statistiques)

A. Fradi, A. Khaldi, C. Samir, A. Wohrer

Université d'Auvergne
Clermont-Ferrand Aurillac Le Puy-en-Velay

2A - IUT Info

Année 2023-2024

Avant de commencer

- Pour toutes questions sur le cours :

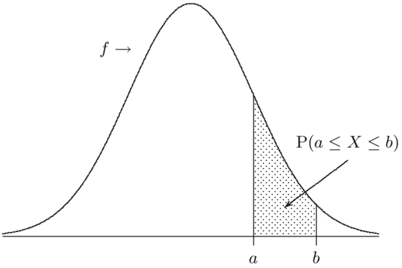
  abderrahmane.khaldi@ext.uca.fr
  chafik.samir@uca.fr
  adrien.wohrer@uca.fr

- Les transparents du cours et d'autres documents sont disponibles sur l'ENT.

Plan du cours aujourd'hui

1. Variable aléatoire continue : rappels
2. Lois de probabilité (continues) usuelles

Variable aléatoire continue



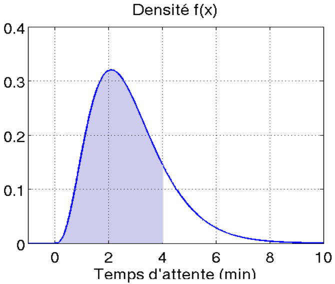
Définition [⋆⋆]

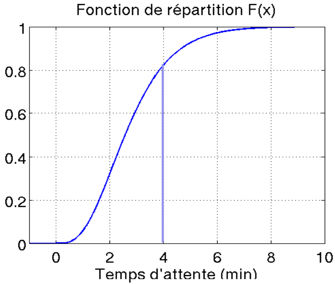
Une variable aléatoire X est dite **continue** s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout intervalle réel $[a, b]$:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

La fonction f s'appelle la **densité de probabilité** de X.

Fonction de répartition





Soit X une v.a. continue de densité f. Sa **fonction de répartition** $F(x)$ vérifie :

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

En particulier, on a

$$f(x) = F'(x)$$

Espérance, variance

Définition

Soit X une v.a. continue de densité f. On définit les deux quantités suivantes :

1. L'**espérance** de X : $E[X] = \int_{\mathcal{X}} x f(x) \mathrm{d}x.$
2. La **variance** de X : $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$

Espérance, variance

Définition

Soit X une v.a. continue de densité f. On définit les deux quantités suivantes :

1. L'**espérance** de X : $E[X] = \int_X xf(x)\mathrm{d}x.$
2. La **variance** de X : $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$

(Comme avant, en remplaçant les **sommes** par des **intégrales** !)

1. Variable aléatoire continue : rappels

2. **Lois de probabilité (continues) usuelles**
   - Loi uniforme
   - Loi exponentielle
   - Loi normale

Loi uniforme

On tire un point au hasard sur le segment $[a, b]$.

Loi uniforme

On tire un point au hasard sur le segment $[a, b]$.

Exemples

- Quelle heure est-il (avec précision infinie) ? $X \sim U(0, 24)$.
- Je rentre de 20 minutes de marche. A quel moment de ma promenade ai-je perdu le téléphone ? $X \sim U(0, 1/3)$.

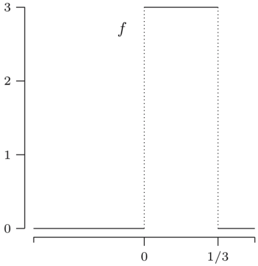
Loi uniforme

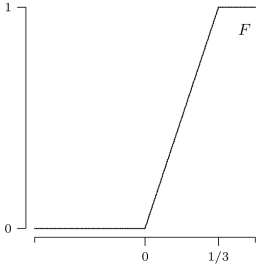
On tire un point au hasard sur le segment $[a, b]$.

Exemples

- Quelle heure est-il (avec précision infinie) ? $X \sim U(0, 24)$.
- Je rentre de 20 minutes de marche. A quel moment de ma promenade ai-je perdu le téléphone ? $X \sim U(0, 1/3)$.

$U(0, \frac{1}{3})$





Loi uniforme

On tire un point au hasard sur le segment $[a, b]$.

Définition

Soit un segment réel $[a, b]$. On dit que X suit une **loi uniforme** sur $[a, b]$, et on note $X \sim U(a, b)$, lorsque :

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{pour } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Loi uniforme

On tire un point au hasard sur le segment $[a, b]$.

Définition

Soit un segment réel $[a, b]$. On dit que X suit une **loi uniforme** sur $[a, b]$, et on note $X \sim U(a, b)$, lorsque :

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{pour } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Propriétés

- $E[X] = (a+b)/2$
- $V[X] = (b-a)^2/12$

Loi exponentielle

Temps d'attente avant un évènement, lorsque je connais juste le **temps moyen** d'attente.

Loi exponentielle

Temps d'attente avant un évènement, lorsque je connais juste le **temps moyen** d'attente.

Exemples

- Arrêt Jaude, 6h du matin. Temps d'attente avant l'arrivée du prochain passager ? $X \sim Exp(1/4)$ (min^{-1})

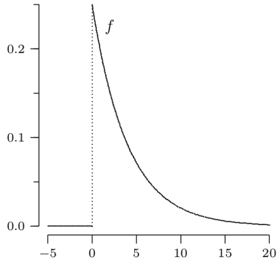
Loi exponentielle

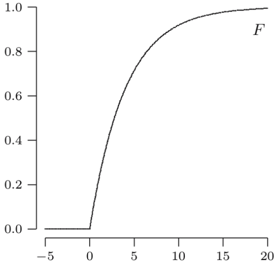
Temps d'attente avant un évènement, lorsque je connais juste le **temps moyen** d'attente.

Exemples

- Arrêt Jaude, 6h du matin. Temps d'attente avant l'arrivée du prochain passager ? $X \sim Exp(1/4)$ (min^{-1})

$Exp(1/4)$





Loi exponentielle

Temps d'attente avant un évènement, lorsque je connais juste le **temps moyen** d'attente.

Définition

Soit un réel $\lambda > 0$. On dit que X suit une **loi exponentielle** de paramètre λ, et on note $X \sim Exp(\lambda)$, lorsque :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Loi exponentielle

Temps d'attente avant un évènement, lorsque je connais juste le **temps moyen** d'attente.

Définition

Soit un réel $\lambda > 0$. On dit que X suit une **loi exponentielle** de paramètre λ, et on note $X \sim Exp(\lambda)$, lorsque :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Propriétés

- On a toujours $X > 0$.
- $E[X] = \lambda^{-1}$
- $V[X] = \lambda^{-2}$

1. **Variable aléatoire continue : rappels**

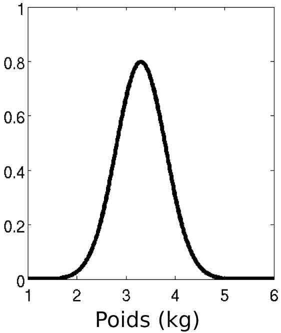
2. **Lois de probabilité (continues) usuelles**
   - Loi uniforme
   - Loi exponentielle
   - Loi normale

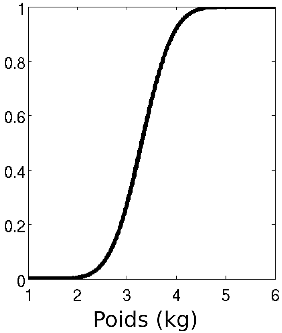
Loi normale (ou Gaussienne)

Distribution d'une v.a. X dont je ne sais rien a priori, hormis sa moyenne m et son écart-type σ.

Loi normale (ou Gaussienne)

Distribution d'une v.a. X dont je ne sais rien a priori, hormis sa moyenne m et son écart-type σ.





Voir la semaine prochaine !