Méthodes d'optimisation

BUT Info 2e année

Florent Foucaud
Dipayan Chakraborty, Malika More, Adrien Wohrer

IUT CLERMONT AUVERGNE
Aurillac - Clermont-Ferrand - Le Puy-en-Velay
Montluçon - Moulins - Vichy

2023-2024

Récapitulatif

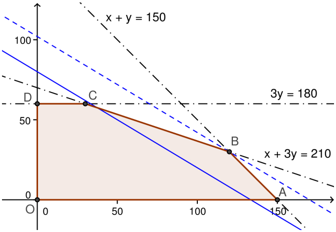
Représentation géométrique d'un programme linéaire

Exemple de programme linéaire

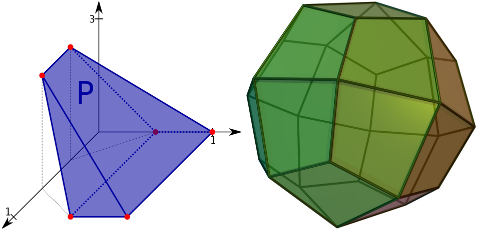
$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{maximiser :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \leq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & x & & & \geq & 0 \\
 & & & y & \geq & 0
\end{array}
$$

Représentation géométrique d'un programme linéaire

- On se place dans un espace à n dimensions, n : nombre de variables du PL.
- Chaque contrainte est un espace à $n-1$ dimensions, qui divise notre espace en deux : → les points qui satisfont / ne satisfont pas la contrainte.
- Ces contraintes définisssent un polytope convexe, qui contient tous les points correspondant à une solution du PL.
  Chaque contrainte produit une facette du polytope.



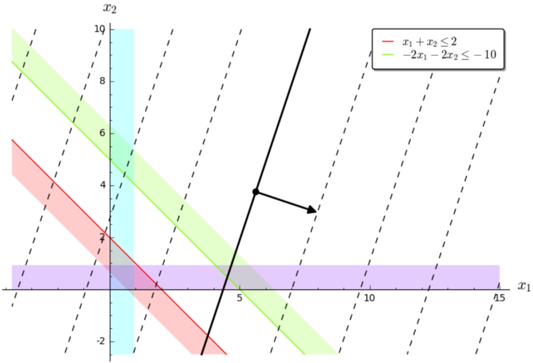
2 variables : polygone



3 variables : polyèdre

Quatre types de programmes linéaires

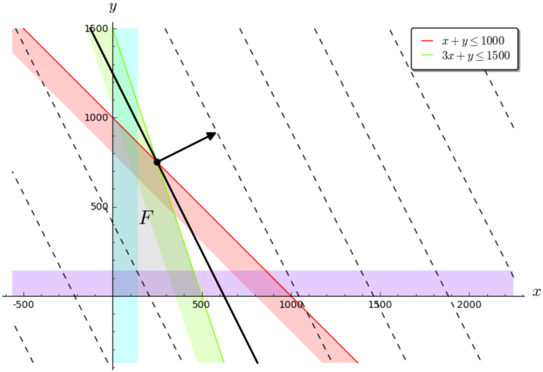
1. Pas de solution du tout



1

Quatre types de programmes linéaires

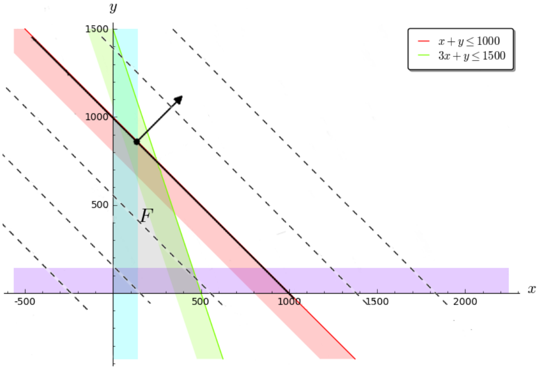
1. Pas de solution du tout
2. Une solution optimale unique, sur un sommet du polytope



2

Quatre types de programmes linéaires

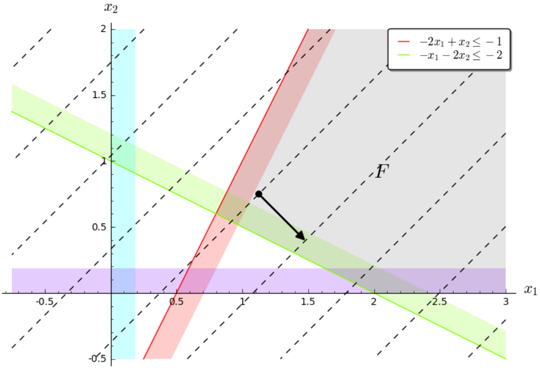
1. Pas de solution du tout
2. Une solution optimale unique, sur un sommet du polytope
3. Une infinité de solutions optimales, sur une arête du polytope



3

Quatre types de programmes linéaires

1. Pas de solution du tout
2. Une solution optimale unique, sur un sommet du polytope
3. Une infinité de solutions optimales, sur une arête du polytope
4. Une infinité de solutions, mais pas de solution optimale : PL non borné



4

Flots dans les graphes

Flot maximum dans un graphe

On considère un graphe orienté pondéré $G = (V, A, c)$ avec une capacité $c(\overrightarrow{xy}) \in \mathbb{R}^+$ pour chaque arc $\overrightarrow{xy} \in A$, une source s et une destination t.

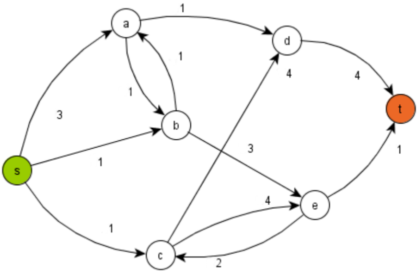
Définition

Un flot est une assignation $f : A \to \mathbb{R}^+$ telle que :

1. pour tout arc $\overrightarrow{xy} \in A$: $f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy})$, *(respect des capacités)*
2. pour tout sommet $v \in V - \{s, t\}$: $\sum_{x:x\to v} f(\overrightarrow{xv}) = \sum_{y:v\to y} f(\overrightarrow{vy})$.

(conservation locale du flot)

On cherche à maximiser la valeur $\sum_{y:s\to y} f(\overrightarrow{sy})$ du flot.



Flot maximum dans un graphe

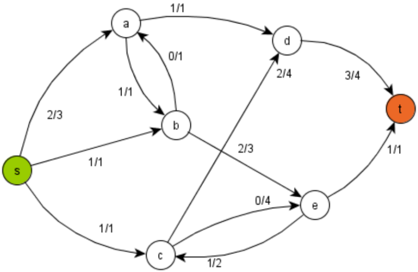
On considère un graphe orienté pondéré $G = (V, A, c)$ avec une capacité $c(\overrightarrow{xy}) \in \mathbb{R}^+$ pour chaque arc $\overrightarrow{xy} \in A$, une source s et une destination t.

Définition

Un flot est une assignation $f : A \to \mathbb{R}^+$ telle que :

1. pour tout arc $\overrightarrow{xy} \in A$: $f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy})$, *(respect des capacités)*
2. pour tout sommet $v \in V - \{s, t\}$: $\sum_{x:x \to v} f(\overrightarrow{xv}) = \sum_{y:v \to y} f(\overrightarrow{vy})$. *(conservation locale du flot)*

On cherche à maximiser la valeur $\sum_{y:s \to y} f(\overrightarrow{sy})$ du flot.



Flot maximum dans un graphe

On considère un graphe orienté pondéré $G = (V, A, c)$ avec une capacité $c(\overrightarrow{xy}) \in \mathbb{R}^+$ pour chaque arc $\overrightarrow{xy} \in A$, une source s et une destination t.

Définition

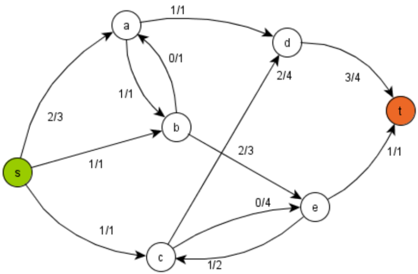
Un flot est une assignation $f : A \to \mathbb{R}^+$ telle que :

1. pour tout arc $\overrightarrow{xy} \in A$: $f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy})$, *(respect des capacités)*
2. pour tout sommet $v \in V - \{s, t\}$: $\sum_{x:x\to v} f(\overrightarrow{xv}) = \sum_{y:v\to y} f(\overrightarrow{vy})$.

(conservation locale du flot)

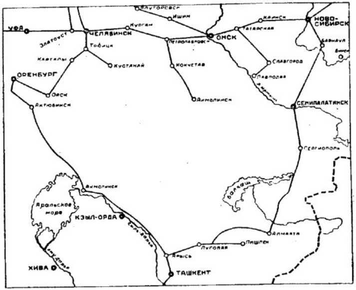
On cherche à maximiser la valeur $\sum_{y:s\to y} f(\overrightarrow{sy})$ du flot.

Applications : réseaux de transport



Flots : un peu d'histoire

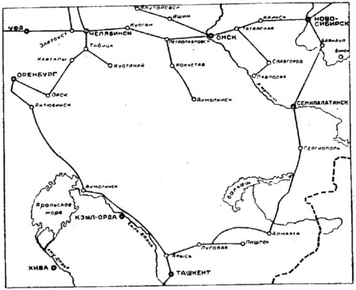
- 1930 : Problème formulé par A. N. Tolstoï, appliqué au réseau de trains en URSS



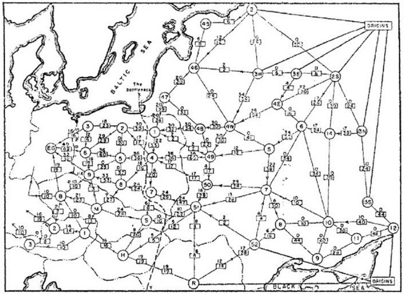
10 sources et 68 destinations soviétiques en 1930

Flots : un peu d'histoire

- 1930 : Problème formulé par A. N. Tolstoï, appliqué au réseau de trains en URSS
- 1954 : T. E. Harris et General F. S. Ross étudient à leur tour le problème (rapport secret de l'US Air Force déclassifié en 1999)
  But : trouver une coupe min du graphe, cibles à bombarder pour couper le flot ferroviaire d'Europe de l'Est, en cas de guerre.



10 sources et 68 destinations soviétiques en 1930



Le réseau ferré d'Europe de l'Est en 1954

Flots : un peu d'histoire

- 1930 : Problème formulé par A. N. Tolstoĭ, appliqué au réseau de trains en URSS
- 1954 : T. E. Harris et General F. S. Ross étudient à leur tour le problème
- 1955 : Algorithme optimal de Ford-Fulkerson pour trouver le flot max

Lester R. Ford

(1886-1967)

Delbert R. Fulkerson

(1924-1976)

Flots : un peu d'histoire

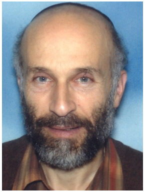
- 1930 : Problème formulé par A. N. Tolstoï, appliqué au réseau de trains en URSS
- 1954 : T. E. Harris et General F. S. Ross étudient à leur tour le problème
- 1955 : Algorithme optimal de Ford-Fulkerson pour trouver le flot max
- 1970-72 : Algorithme de Dinitz-Edmonds-Karp, qui termine à tous les coups, en temps $O(|V| \cdot |A|^2)$ ou $O(|V|^2 \cdot |A|)$

Lester R. Ford

(1886-1967)

Delbert R. Fulkerson

(1924-1976)



Yefim Dinitz

(1950-)

Jack Edmonds

(1934-)

Richard M. Karp

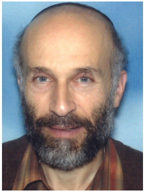
(1935-)

Flots : un peu d'histoire

- 1930 : Problème formulé par A. N. Tolstoĭ, appliqué au réseau de trains en URSS
- 1954 : T. E. Harris et General F. S. Ross étudient à leur tour le problème
- 1955 : Algorithme optimal de Ford-Fulkerson pour trouver le flot max
- 1970-72 : Algorithme de Dinitz-Edmonds-Karp, qui termine à tous les coups, en temps $O(|V| \cdot |A|^2)$ ou $O(|V|^2 \cdot |A|)$
- ...
- 2013 : Meilleur algorithme à ce jour, en temps $O(|V| \cdot |A|)$ (J. B. Orlin)

Lester R. Ford (1886-1967)

Delbert R. Fulkerson (1924-1976)



Yefim Dinitz (1950-)

Jack Edmonds (1934-)

Richard M. Karp (1935-)

James B. Orlin (1953-)

Flots sous forme de programmes linéaires

Définition

Dans un graphe orienté $G = (V, A)$, un flot est une assignation $f : A \to \mathbb{R}^+$ telle que :

1. pour tout arc $\overrightarrow{xy} \in A$: $f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy})$, *(respect des capacités)*
2. pour tout sommet $v \in V - \{s, t\}$: $\sum_{x:x\to v} f(\overrightarrow{xv}) = \sum_{y:v\to y} f(\overrightarrow{vy})$. *(conservation locale du flot)*

On cherche à maximiser la valeur $\sum_{y:s\to y} f(\overrightarrow{sy})$ du flot.

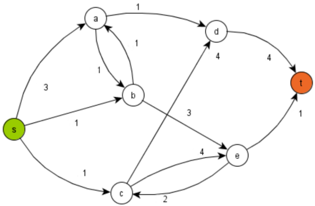
Flots sous forme de programmes linéaires

Définition

Dans un graphe orienté $G = (V, A)$, un flot est une assignation $f : A \to \mathbb{R}^+$ telle que :

1. pour tout arc $\overrightarrow{xy} \in A : f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy})$, *(respect des capacités)*
2. pour tout sommet $v \in V - \{s, t\} : \sum_{x:x\to v} f(\overrightarrow{xv}) = \sum_{y:v\to y} f(\overrightarrow{vy})$. *(conservation locale du flot)*

On cherche à maximiser la valeur $\sum_{y:s\to y} f(\overrightarrow{sy})$ du flot.



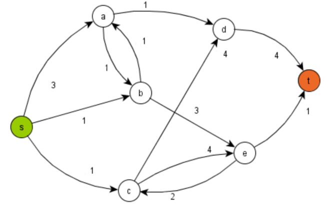
Flots sous forme de programmes linéaires

Définition

Dans un graphe orienté $G = (V, A)$, un flot est une assignation $f : A \to \mathbb{R}^+$ telle que :

1. pour tout arc $\overrightarrow{xy} \in A : f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy})$, *(respect des capacités)*
2. pour tout sommet $v \in V - \{s, t\} : \sum_{x:x\to v} f(\overrightarrow{xv}) = \sum_{y:v\to y} f(\overrightarrow{vy})$. *(conservation locale du flot)*

On cherche à maximiser la valeur $\sum_{y:s\to y} f(\overrightarrow{sy})$ du flot.



Programme linéaire correspondant :

On prend une variable f_a pour chaque arc a.

maximiser : $f_{\overrightarrow{sa}} + f_{\overrightarrow{sb}} + f_{\overrightarrow{sc}}$

tel que :

$f_{\overrightarrow{sa}} \leq 3$ *capacité arc $\overrightarrow{sa}$*

$f_{\overrightarrow{sa}} \geq 0$ *flot non-négatif pour arc $\overrightarrow{sa}$*

(idem pour tous les autres arcs)

$f_{\overrightarrow{sa}} + f_{\overrightarrow{ba}} = f_{\overrightarrow{ab}} + f_{\overrightarrow{ad}}$ *contrainte flot sommet a*

(idem pour tous les autres sommets)

Flots sous forme de programmes linéaires

Définition

Dans un graphe orienté $G = (V, A)$, un flot est une assignation $f : A \to \mathbb{R}^+$ telle que :

1. pour tout arc $\overrightarrow{xy} \in A$: $f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy})$, *(respect des capacités)*
2. pour tout sommet $v \in V - \{s, t\}$: $\sum_{x:x\to v} f(\overrightarrow{xv}) = \sum_{y:v\to y} f(\overrightarrow{vy})$. *(conservation locale du flot)*

On cherche à maximiser la valeur $\sum_{y:s\to y} f(\overrightarrow{sy})$ du flot.

Programme linéaire en général :

On prend une variable f_a pour chaque arc a.

$$
\begin{array}{llcll}
\text{maximiser :} & \sum_{y:s\to y} f_{\overrightarrow{sy}} & & & \\
\text{tel que :} & f_a & \leq & c(a) & \text{pour tout arc } a \\
 & f_a & \geq & 0 & \text{pour tout arc } a \\
 & \sum_{x:x\to v} f_{\overrightarrow{xv}} & = & \sum_{y:v\to y} f_{\overrightarrow{vy}} & \text{pour tout sommet } v
\end{array}
$$

L'algorithme du simplexe

Reformulation d'un PL

Souvent, on standardise les PL avec les conditions suivantes :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec au moins deux variables sont des $\leq$
- Les variables sont toutes ≥ 0

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{minimiser :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \geq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & & & y & \geq & -2
\end{array}
$$

Reformulation d'un PL

Souvent, on standardise les PL avec les conditions suivantes :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec au moins deux variables sont des $\leq$
- Les variables sont toutes ≥ 0

$$\begin{array}{llllll} \text{minimiser :} & 10x & + & 5y & & \\ \text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \geq & 1000 \\ & 3x & + & y & \leq & 1500 \\ & & & y & \geq & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \text{max. :} & -10x & - & 5y & & \\ \text{t.q. :} & 1.5x & - & 2y & \geq & 1000 \\ & 3x & + & y & \leq & 1500 \\ & & & y & \geq & -2 \end{array}$$

Reformulation d'un PL

Souvent, on standardise les PL avec les conditions suivantes :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec au moins deux variables sont des $\leq$
- Les variables sont toutes ≥ 0

$$\begin{array}{lrcrcl}
\text{minimiser :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \geq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & & & y & \geq & -2
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcl}
\text{max. :} & -10x & - & 5y & & \\
\text{t.q. :} & -1.5x & + & 2y & \leq & -1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & & & y & \geq & -2
\end{array}$$

Reformulation d'un PL

Souvent, on standardise les PL avec les conditions suivantes :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec au moins deux variables sont des $\leq$
- Les variables sont toutes ≥ 0

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{minimiser :} & 10x & + & 5y & & \\ \text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \geq & 1000 \\ & 3x & + & y & \leq & 1500 \\ & & & y & \geq & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{max. :} & -10x & - & 5(y'-2) & & \\ \text{t.q. :} & -1.5x & + & 2(y'-2) & \leq & -1000 \\ & 3x & + & y'-2 & \leq & 1500 \\ & & & y' & \geq & 0 \end{array}$$

1. On pose $y = y' - 2$ avec $y' \geq 0$

Reformulation d'un PL

Souvent, on standardise les PL avec les conditions suivantes :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec au moins deux variables sont des $\leq$
- Les variables sont toutes ≥ 0

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{minimiser :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \geq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & & & y & \geq & -2
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{max. :} & -10x & - & 5y' & & \\
\text{t.q. :} & -1.5x & + & 2y' & \leq & -996 \\
 & 3x & + & y' & \leq & 1502 \\
 & & & y' & \geq & 0
\end{array}$$

1. On pose $y = y' - 2$ avec $y' \geq 0$

Reformulation d'un PL

Souvent, on standardise les PL avec les conditions suivantes :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec au moins deux variables sont des $\leq$
- Les variables sont toutes ≥ 0

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{minimiser :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \geq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & & & y & \geq & -2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{max. :} & -10(x^+ - x^-) & - & 5y' & & \\
\text{t.q. :} & -1.5(x^+ - x^-) & + & 2y' & \leq & -996 \\
 & 3(x^+ - x^-) & + & y' & \leq & 1502 \\
 & & & y' & \geq & 0 \\
 & x^+ & & & \geq & 0 \\
 & x^- & & & \geq & 0
\end{array}
$$

1. On pose $y = y' - 2$ avec $y' \geq 0$
2. On pose $x = x^+ - x^-$ avec $x^+, x^- \geq 0$

Reformulation d'un PL

Souvent, on standardise les PL avec les conditions suivantes :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec au moins deux variables sont des $\leq$
- Les variables sont toutes ≥ 0

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{minimiser :} & 10x & + & 5y & & \\ \text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \geq & 1000 \\ & 3x & + & y & \leq & 1500 \\ & & & y & \geq & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{max. :} & -10x^+ & + & 10x^- & - & 5y' & & \\ \text{t.q. :} & -1.5x^+ & + & 1.5x^- & + & 2y' & \leq & -996 \\ & 3x^+ & - & 3x^- & + & y' & \leq & 1502 \\ & & & & & y' & \geq & 0 \\ & x^+ & & & & & \geq & 0 \\ & & & x^- & & & \geq & 0 \end{array}$$

1. On pose $y = y' - 2$ avec $y' \geq 0$
2. On pose $x = x^+ - x^-$ avec $x^+, x^- \geq 0$

Forme standard d'un PL

Un programme linéaire est sous forme standard si :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec ≥ 2 variables sont des ≤
- Les variables sont toutes ≥ 0
- Les contraintes (autres que "variable ≥ 0") sont des égalités

$$\begin{array}{lrcrcl}
\text{max. :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{t.q. :} & 1.5x & - & 2y & \leq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & x & & & \geq & 0 \\
 & & & y & \geq & 0
\end{array}$$

Forme standard d'un PL

Un programme linéaire est sous forme standard si :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec ≥ 2 variables sont des ≤
- Les variables sont toutes ≥ 0
- Les contraintes (autres que "variable ≥ 0") sont des égalités

$$\begin{array}{lrcrcl}
\text{max. :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{t.q. :} & 1.5x & - & 2y & \leq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & x & & & \geq & 0 \\
 & & & y & \geq & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{max. :} & 10x & + & 5y & & & & & & \\
\text{t.q. :} & 1.5x & - & 2y & + & e_1 & & & = & 1000 \\
 & 3x & + & y & & & + & e_2 & = & 1500 \\
 & x & & & & & & & \geq & 0 \\
 & & & y & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & e_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & e_2 & \geq & 0
\end{array}$$

On introduit une variable d'écart pour chaque contrainte

Forme standard d'un PL

Un programme linéaire est sous forme standard si :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec ≥ 2 variables sont des ≤
- Les variables sont toutes ≥ 0
- Les contraintes (autres que “variable ≥ 0”) sont des égalités

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{max. :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{t.q. :} & 1.5x & - & 2y & \leq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & x & & & \geq & 0 \\
 & & & y & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{max. :} & 10x & + & 5y & & & & & & \\
\text{t.q. :} & 1.5x & - & 2y & + & e_1 & & & = & 1000 \\
 & 3x & + & y & & & + & e_2 & = & 1500 \\
 & x & & & & & & & \geq & 0 \\
 & & & y & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & e_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & e_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

On introduit une variable d'écart pour chaque contrainte

Remarque : $2x - 3y \geq 1000$ est équivalent à $2x - 3y - e = 1000$ et $e \geq 0$

Forme standard d'un PL

Un programme linéaire est sous forme standard si :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec ≥ 2 variables sont des $\leq$
- Les variables sont toutes ≥ 0
- Les contraintes (autres que "variable ≥ 0") sont des égalités

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{max. :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{t.q. :} & 1.5x & - & 2y & \leq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & x & & & \geq & 0 \\
 & & & y & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{max. :} & 10x & + & 5y & & & & & & \\
\text{t.q. :} & 1.5x & - & 2y & + & e_1 & & & = & 1000 \\
 & 3x & + & y & & & + & e_2 & = & 1500 \\
 & x & & & & & & & \geq & 0 \\
 & & & y & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & e_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & e_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

On introduit une variable d'écart pour chaque contrainte

Remarque : $2x - 3y \geq 1000$ est équivalent à $2x - 3y - e = 1000$ et $e \geq 0$

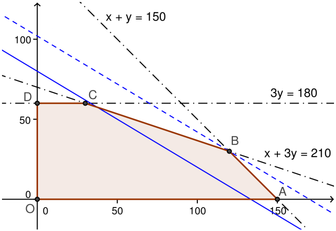
Proposition

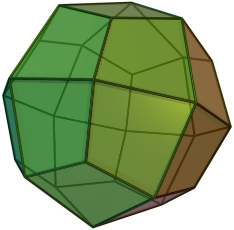
Tout PL est équivalent à sa forme standard.

L’algo du simplexe : principe

Principe général :

0. On part d’un PL en forme standard
1. On trouve une solution non-optimale en un point du polytope associé à notre PL
2. Tant qu’on peut, on évolue vers une solution proche qui améliore la fonction objectif
   (si on ne peut plus améliorer la solution courante, on s’arrête : on a trouvé une solution optimale !)





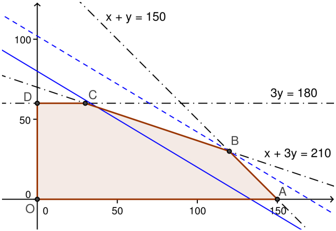
L'algo du simplexe : principe

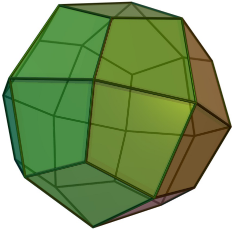
Principe général :

0. On part d'un PL en forme standard

1. On trouve une solution non-optimale en un point du polytope associé à notre PL

2. Tant qu'on peut, on évolue vers une solution proche qui améliore la fonction objectif
(si on ne peut plus améliorer la solution courante, on s'arrête : on a trouvé une solution optimale !)





Quelques détails techniques délicats :

- Trouver la solution initiale n'est pas forcément si facile !
- Il faut éviter de boucler en cours de route
- Pour aller de solution en solution, on utilise la notion de pivot

L'algo du simplexe : historique

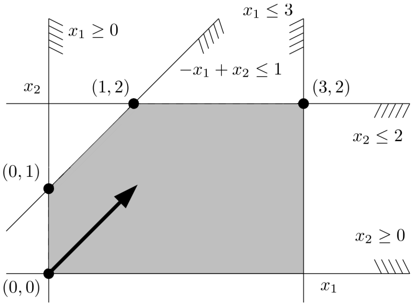
- Interactions entre Dantzig et von Neumann
- Proposé en 1947 par George B. Dantzig
- Initialement jugé (par erreur) mauvais en performances
- En réalité, il est très performant en pratique
- Implémenté pour la première fois en 1952 (problème de nutrition)

George B. Dantzig (1914-2005)

John von Neumann (1903-1957)

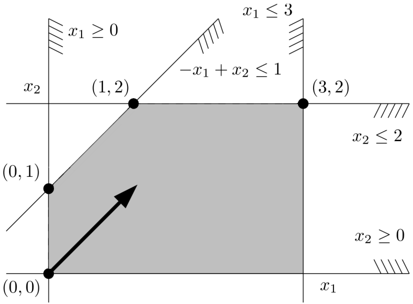
L'algo sur un exemple

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{maximiser :} & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{tel que :} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$



L'algo sur un exemple

$$\begin{array}{lrcrcl}
\text{maximiser :} & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{tel que :} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

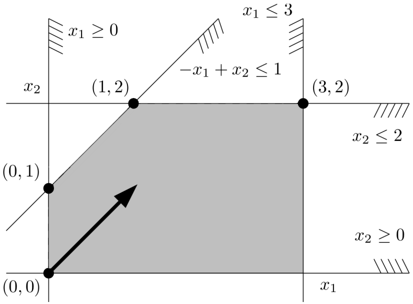


On passe le PL en forme standard via des variables d'écart x_3, x_4, x_5 :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\text{maximiser :} & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\
\text{tel que :} & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \\
 & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 3 \\
 & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2 \\
 & x_1 & & & & & & & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & & & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & x_3 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & & & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

L'algo sur un exemple

$$\begin{array}{lrcrcl}
\text{maximiser :} & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{tel que :} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$



On passe le PL en forme standard via des variables d'écart x_3, x_4, x_5 :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\text{maximiser :} & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\
\text{tel que :} & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \\
 & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 3 \\
 & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2 \\
 & x_1 & & & & & & & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & & & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & x_3 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & & & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

On voit que $x_1 = x_2 = 0$ est une solution (non-optimale) du PL originel.

$\rightarrow$ Cela implique $x_3 = 1$, $x_4 = 3$, $x_5 = 2$ dans le nouveau PL : solution $(0, 0, 1, 3, 2)$.

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\text{maximiser} & z & = & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\
\text{tel que :} & & & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \\
 & & & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 3 \\
 & & & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2 \\
 & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Exemple d’exécution de l’algorithme du simplexe

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcl}
\text{maximiser} & z = & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\
\text{tel que :} & & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \\
 & & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 3 \\
 & & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|lllllll|}
\hline
x_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \\
\hline
x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\
\hline
x_5 & = & 2 & & & - & x_2 \\
\hline
z & = & & & x_1 & + & x_2 \\
\hline
\end{array}
$$

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

On démarre avec notre solution basique $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$, $x_5 = 2$.
Les variables non-nulles x_3, x_4, x_5 sont appelées basiques.

On réécrit le PL sous forme d’un tableau de simplexe.

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

On veut améliorer la solution en augmentant une seule variable qui était à 0.

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

On veut améliorer la solution en augmentant une seule variable qui était à 0.

On peut choisir x_1 ou x_2 : prenons x_2. C'est le **pivot**.

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

On veut améliorer la solution en augmentant une seule variable qui était à 0.

On peut choisir x_1 ou x_2 : prenons x_2. C'est le **pivot**.

Par exemple, si on prend $x_2 = 1$, on obtient $z = 1$.
Si on prend $x_2 = 2$, on obtient $z = 2$, c'est encore mieux.

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

On veut améliorer la solution en augmentant une seule variable qui était à 0.

On peut choisir x_1 ou x_2 : prenons x_2. C'est le **pivot**.

Par exemple, si on prend $x_2 = 1$, on obtient $z = 1$.
Si on prend $x_2 = 2$, on obtient $z = 2$, c'est encore mieux.

Par contre, on aurait alors $x_3 = 1 + 0 - 2 < 0$ ce qui n'est pas autorisé....

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

On veut améliorer la solution en augmentant une seule variable qui était à 0.

On peut choisir x_1 ou x_2 : prenons x_2. C'est le **pivot**.

De combien peut-on augmenter x_2 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_1 = 0$) :

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z = 0$

On veut améliorer la solution en augmentant une seule variable qui était à 0.

On peut choisir x_1 ou x_2 : prenons x_2. C'est le **pivot**.

De combien peut-on augmenter x_2 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_1 = 0$) :

$x_3 = 1 + x_1 - x_2 \geq 0$ donc $1 - x_2 \geq 0$ et $1 \geq x_2$

Exemple d’exécution de l’algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

On veut améliorer la solution en augmentant une seule variable qui était à 0.

On peut choisir x_1 ou x_2 : prenons x_2. C’est le **pivot**.

De combien peut-on augmenter x_2 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_1 = 0$) :

$x_3 = 1 + x_1 - x_2 \geq 0$ donc $1 - x_2 \geq 0$ et $1 \geq x_2$

$x_4 = 3 - x_1 \geq 0 \rightarrow$ aucune influence sur x_2

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z = 0$

On veut améliorer la solution en augmentant une seule variable qui était à 0.

On peut choisir x_1 ou x_2 : prenons x_2. C'est le **pivot**.

De combien peut-on augmenter x_2 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_1 = 0$) :

$x_3 = 1 + x_1 - x_2 \geq 0$ donc $1 - x_2 \geq 0$ et $1 \geq x_2$

$x_4 = 3 - x_1 \geq 0 \rightarrow$ aucune influence sur x_2

$x_5 = 2 - x_2 \geq 0$ donc $2 - x_2 \geq 0$ et $2 \geq x_2$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z = 0$

On veut améliorer la solution en augmentant une seule variable qui était à 0.

On peut choisir x_1 ou x_2 : prenons x_2. C'est le **pivot**.

De combien peut-on augmenter x_2 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_1 = 0$) :

$x_3 = 1 + x_1 - x_2 \geq 0$ donc $1 - x_2 \geq 0$ et $1 \geq x_2$

$x_4 = 3 - x_1 \geq 0 \rightarrow$ aucune influence sur x_2

$x_5 = 2 - x_2 \geq 0$ donc $2 - x_2 \geq 0$ et $2 \geq x_2$

On augmente x_2 au maximum autorisé : $x_2 = 1$, et on garde $x_1 = 0$.

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

On veut améliorer la solution en augmentant une seule variable qui était à 0.

On peut choisir x_1 ou x_2 : prenons x_2. C'est le **pivot**.

De combien peut-on augmenter x_2 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_1 = 0$) :

$x_3 = 1 + x_1 - x_2 \geq 0$ donc $1 - x_2 \geq 0$ et $1 \geq x_2$

$x_4 = 3 - x_1 \geq 0 \rightarrow$ aucune influence sur x_2

$x_5 = 2 - x_2 \geq 0$ donc $2 - x_2 \geq 0$ et $2 \geq x_2$

On augmente x_2 au maximum autorisé : $x_2 = 1$, et on garde $x_1 = 0$.

On calcule x_3, x_4 et x_5 grâce au tableau : $x_3 = 0$, $x_4 = 3$, $x_5 = 1$

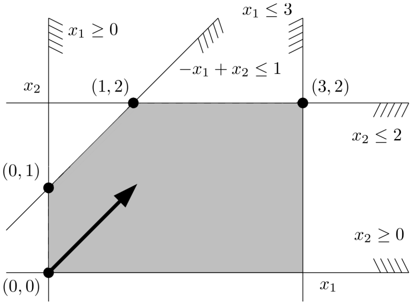
Nouvelle solution : $(0,1,0,3,1)$ qui donne $z = 1$.

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

Nouvelle solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$ qui donne $z = 1$.



Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

$$
\begin{array}{|ccccccc|}
\hline
x_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \\
\hline
x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\
\hline
x_5 & = & 2 & & & - & x_2 \\
\hline
z & = & & & x_1 & + & x_2 \\
\hline
\end{array}
$$

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

Nouvelle solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$ qui donne $z = 1$.

x_2 est maintenant une variable basique, mais plus x_3 ! On réécrit le tableau :

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

Nouvelle solution : $(0,1,0,3,1)$ qui donne $z=1$.

x_2 est maintenant une variable basique, mais plus x_3 ! On réécrit le tableau :

$x_2 = 1 + x_1 - x_3$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

Nouvelle solution : $(0,1,0,3,1)$ qui donne $z=1$.

x_2 est maintenant une variable basique, mais plus x_3 ! On réécrit le tableau :

$x_2 = 1 + x_1 - x_3$

$x_4 = 3 - x_1$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

Nouvelle solution : $(0,1,0,3,1)$ qui donne $z=1$.

x_2 est maintenant une variable basique, mais plus x_3 ! On réécrit le tableau :

$x_2 = 1 + x_1 - x_3$

$x_4 = 3 - x_1$

$x_5 = 2 - x_2 = 2 - (1 + x_1 - x_3) = 1 - x_1 + x_3$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

Nouvelle solution : $(0,1,0,3,1)$ qui donne $z=1$.

x_2 est maintenant une variable basique, mais plus x_3 ! On réécrit le tableau :

$x_2 = 1 + x_1 - x_3$

$x_4 = 3 - x_1$

$x_5 = 2 - x_2 = 2 - (1 + x_1 - x_3) = 1 - x_1 + x_3$

$z = x_1 + x_2 = x_1 + (1 + x_1 - x_3) = 1 + 2x_1 - x_3$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

Nouvelle solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$ qui donne $z = 1$.

x_2 est maintenant une variable basique, mais plus x_3 ! On réécrit le tableau :

$x_2 = 1 + x_1 - x_3$

$x_4 = 3 - x_1$

$x_5 = 2 - x_2 = 2 - (1 + x_1 - x_3) = 1 - x_1 + x_3$

$z = x_1 + x_2 = x_1 + (1 + x_1 - x_3) = 1 + 2x_1 - x_3$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

$$\begin{array}{|ccccccc|}
\hline
x_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \\
\hline
x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\
\hline
x_5 & = & 2 & & & - & x_2 \\
\hline
z & = & & & x_1 & + & x_2 \\
\hline
\end{array}$$

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

$$\begin{array}{|ccccccc|}
\hline
x_2 & = & 1 & + & x_1 & - & x_3 \\
\hline
x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\
\hline
x_5 & = & 1 & - & x_1 & + & x_3 \\
\hline
z & = & 1 & + & 2x_1 & - & x_3 \\
\hline
\end{array}$$

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_1, car x_3 ferait baisser la fonction objectif.

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_1, car x_3 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_1 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_3 = 0$) :

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_1, car x_3 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_1 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_3 = 0$) :

$x_2 = 1 + x_1 - x_3 \geq 0$ donc $1 + x_1 \geq 0$ et $x_1 \geq -1$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_1, car x_3 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_1 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_3 = 0$) :

$x_2 = 1 + x_1 - x_3 \geq 0$ donc $1 + x_1 \geq 0$ et $x_1 \geq -1$

$x_4 = 3 - x_1 \geq 0$ donc $3 \geq x_1$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_1, car x_3 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_1 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_3=0$) :

$x_2 = 1 + x_1 - x_3 \geq 0$ donc $1 + x_1 \geq 0$ et $x_1 \geq -1$

$x_4 = 3 - x_1 \geq 0$ donc $3 \geq x_1$

$x_5 = 1 - x_1 + x_3 \geq 0$ donc $1 - x_1 \geq 0$ et $1 \geq x_1$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_1, car x_3 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_1 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_3 = 0$) :

$x_2 = 1 + x_1 - x_3 \geq 0$ donc $1 + x_1 \geq 0$ et $x_1 \geq -1$

$x_4 = 3 - x_1 \geq 0$ donc $3 \geq x_1$

$x_5 = 1 - x_1 + x_3 \geq 0$ donc $1 - x_1 \geq 0$ et $1 \geq x_1$

On augmente x_1 au maximum autorisé : $x_1 = 1$, et on garde $x_3 = 0$.

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_1, car x_3 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_1 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_3 = 0$) :

$x_2 = 1 + x_1 - x_3 \geq 0$ donc $1 + x_1 \geq 0$ et $x_1 \geq -1$

$x_4 = 3 - x_1 \geq 0$ donc $3 \geq x_1$

$x_5 = 1 - x_1 + x_3 \geq 0$ donc $1 - x_1 \geq 0$ et $1 \geq x_1$

On augmente x_1 au maximum autorisé : $x_1 = 1$, et on garde $x_3 = 0$.

On calcule x_2, x_4 et x_5 grâce au tableau : $x_2 = 2$, $x_4 = 2$, $x_5 = 0$

Nouvelle solution : $(1,2,0,2,0)$ qui donne $z = 3$.

Exemple d’exécution de l’algorithme du simplexe

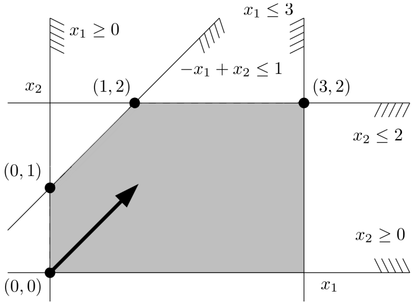
x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

Nouvelle solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$ qui donne $z = 3$.



Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

Nouvelle solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$ qui donne $z = 3$.

x_1 est maintenant une variable basique, mais plus x_5 ! On réécrit le tableau :

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

Nouvelle solution : $(1,2,0,2,0)$ qui donne $z=3$.

x_1 est maintenant une variable basique, mais plus x_5 ! On réécrit le tableau :

$x_1 = 1 + x_3 - x_5$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

Nouvelle solution : $(1,2,0,2,0)$ qui donne $z=3$.

x_1 est maintenant une variable basique, mais plus x_5 ! On réécrit le tableau :

$$x_1 = 1 + x_3 - x_5$$
$$x_2 = 1 + x_1 - x_3 = 1 + (1 + x_3 - x_5) - x_3 = 2 + x_5$$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

Nouvelle solution : $(1,2,0,2,0)$ qui donne $z=3$.

x_1 est maintenant une variable basique, mais plus x_5 ! On réécrit le tableau :

$x_1 = 1 + x_3 - x_5$

$x_2 = 1 + x_1 - x_3 = 1 + (1 + x_3 - x_5) - x_3 = 2 + x_5$

$x_4 = 3 - x_1 = 3 - (1 + x_3 - x_5) = 2 - x_3 + x_5$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

Nouvelle solution : $(1,2,0,2,0)$ qui donne $z=3$.

x_1 est maintenant une variable basique, mais plus x_5 ! On réécrit le tableau :

$x_1 = 1 + x_3 - x_5$

$x_2 = 1 + x_1 - x_3 = 1 + (1 + x_3 - x_5) - x_3 = 2 + x_5$

$x_4 = 3 - x_1 = 3 - (1 + x_3 - x_5) = 2 - x_3 + x_5$

$z = 1 + 2x_1 - x_3 = 1 + 2(1 + x_3 - x_5) - x_3 = 3 + x_3 - 2x_5$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

Nouvelle solution : $(1,2,0,2,0)$ qui donne $z=3$.

x_1 est maintenant une variable basique, mais plus x_5 ! On réécrit le tableau :

$$x_1 = 1 + x_3 - x_5$$
$$x_2 = 1 + x_1 - x_3 = 1 + (1 + x_3 - x_5) - x_3 = 2 + x_5$$
$$x_4 = 3 - x_1 = 3 - (1 + x_3 - x_5) = 2 - x_3 + x_5$$
$$z = 1 + 2x_1 - x_3 = 1 + 2(1 + x_3 - x_5) - x_3 = 3 + x_3 - 2x_5$$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1,2,0,2,0)$, $z=3$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1,2,0,2,0)$, $z=3$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_3, car x_5 ferait baisser la fonction objectif.

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_3, car x_5 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_3 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_5 = 0$) :

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_3, car x_5 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_3 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_5 = 0$) :

$x_1 = 1 + x_3 - x_5 \geq 0$ donc $1 + x_3 \geq 0$ et $x_3 \geq -1$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_3, car x_5 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_3 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_5 = 0$) :

$x_1 = 1 + x_3 - x_5 \geq 0$ donc $1 + x_3 \geq 0$ et $x_3 \geq -1$
$x_2 = 2 + x_5 \geq 0 \rightarrow$ aucune influence sur x_3

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1,2,0,2,0)$, $z=3$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_3, car x_5 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_3 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_5 = 0$) :

$x_1 = 1 + x_3 - x_5 \geq 0$ donc $1 + x_3 \geq 0$ et $x_3 \geq -1$
$x_2 = 2 + x_5 \geq 0 \rightarrow$ aucune influence sur x_3
$x_4 = 2 - x_3 + x_5 \geq 0$ donc $2 - x_3 \geq 0$ et $2 \geq x_3$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

Quel **pivot** choisir ? $\quad\rightarrow\quad$ x_3, car x_5 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_3 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_5 = 0$) :

$x_1 = 1 + x_3 - x_5 \geq 0$ donc $1 + x_3 \geq 0$ et $x_3 \geq -1$
$x_2 = 2 + x_5 \geq 0 \rightarrow$ aucune influence sur x_3
$x_4 = 2 - x_3 + x_5 \geq 0$ donc $2 - x_3 \geq 0$ et $2 \geq x_3$

On augmente x_3 au maximum autorisé : $x_3 = 2$, et on garde $x_5 = 0$.

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1,2,0,2,0)$, $z=3$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_3, car x_5 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_3 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_5 = 0$) :

$x_1 = 1 + x_3 - x_5 \geq 0$ donc $1 + x_3 \geq 0$ et $x_3 \geq -1$
$x_2 = 2 + x_5 \geq 0 \rightarrow$ aucune influence sur x_3
$x_4 = 2 - x_3 + x_5 \geq 0$ donc $2 - x_3 \geq 0$ et $2 \geq x_3$

On augmente x_3 au maximum autorisé : $x_3 = 2$, et on garde $x_5 = 0$.

On calcule x_1, x_2 et x_4 grâce au tableau : $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_4 = 0$

Nouvelle solution : $(3,2,2,0,0)$ qui donne $z = 5$.

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

Nouvelle solution : $(3, 2, 2, 0, 0)$ qui donne $z = 5$.

x_3 est maintenant une variable basique, mais plus x_4 ! On réécrit le tableau :

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1,2,0,2,0)$, $z=3$

Nouvelle solution : $(3,2,2,0,0)$ qui donne $z=5$.

x_3 est maintenant une variable basique, mais plus x_4 ! On réécrit le tableau :

$x_3 = 2 - x_4 + x_5$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1,2,0,2,0)$, $z=3$

Nouvelle solution : $(3,2,2,0,0)$ qui donne $z=5$.

x_3 est maintenant une variable basique, mais plus x_4 ! On réécrit le tableau :

$x_3 = 2 - x_4 + x_5$

$x_1 = 1 + x_3 - x_5 = 1 + (2 - x_4 + x_5) - x_5 = 3 - x_4$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

Nouvelle solution : $(3, 2, 2, 0, 0)$ qui donne $z = 5$.

x_3 est maintenant une variable basique, mais plus x_4 ! On réécrit le tableau :

$x_3 = 2 - x_4 + x_5$

$x_1 = 1 + x_3 - x_5 = 1 + (2 - x_4 + x_5) - x_5 = 3 - x_4$

$x_2 = 2 - x_5$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1,2,0,2,0)$, $z=3$

Nouvelle solution : $(3,2,2,0,0)$ qui donne $z=5$.

x_3 est maintenant une variable basique, mais plus x_4 ! On réécrit le tableau :

$x_3 = 2 - x_4 + x_5$

$x_1 = 1 + x_3 - x_5 = 1 + (2 - x_4 + x_5) - x_5 = 3 - x_4$

$x_2 = 2 - x_5$

$z = 3 + x_3 - 2x_5 = 3 + (2 - x_4 + x_5) - 2x_5 = 5 - x_4 - x_5$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1,2,0,2,0)$, $z=3$

x_3	$=$	2	$-$	x_4	$+$	x_5
x_1	$=$	3	$-$	x_4		
x_2	$=$	2			$+$	x_5
z	$=$	5	$-$	x_4	$-$	x_5

Solution : $(3,2,2,0,0)$, $z=5$

Nouvelle solution : $(3,2,2,0,0)$ qui donne $z=5$.

x_3 est maintenant une variable basique, mais plus x_4 ! On réécrit le tableau :

$x_3 = 2 - x_4 + x_5$

$x_1 = 1 + x_3 - x_5 = 1 + (2 - x_4 + x_5) - x_5 = 3 - x_4$

$x_2 = 2 - x_5$

$z = 3 + x_3 - 2x_5 = 3 + (2 - x_4 + x_5) - 2x_5 = 5 - x_4 - x_5$

Exemple d’exécution de l’algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

x_3	$=$	2	$-$	x_4	$+$	x_5
x_1	$=$	3	$-$	x_4		
x_2	$=$	2			$+$	x_5
z	$=$	5	$-$	x_4	$-$	x_5

Solution : $(3, 2, 2, 0, 0)$, $z = 5$

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

x_3	$=$	2	$-$	x_4	$+$	x_5
x_1	$=$	3	$-$	x_4		
x_2	$=$	2			$+$	x_5
z	$=$	5	$-$	x_4	$-$	x_5

Solution : $(3, 2, 2, 0, 0)$, $z = 5$

Quel **pivot** choisir ?

Exemple d’exécution de l’algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

x_3	$=$	2	$-$	x_4	$+$	x_5
x_1	$=$	3	$-$	x_4		
x_2	$=$	2			$+$	x_5
z	$=$	5	$-$	x_4	$-$	x_5

Solution : $(3, 2, 2, 0, 0)$, $z = 5$

Quel **pivot** choisir ?

Aucun, car on baisserait la valeur de la fonction objectif.

L’algorithme est terminé !

La solution optimale est $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 2, 2, 0, 0)$ avec $z = 5$.

Exemple d'exécution de l'algorithme du simplexe

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

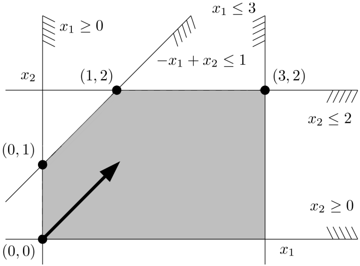
x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

x_3	$=$	2	$-$	x_4	$+$	x_5
x_1	$=$	3	$-$	x_4		
x_2	$=$	2			$+$	x_5
z	$=$	5	$-$	x_4	$-$	x_5

Solution : $(3, 2, 2, 0, 0)$, $z = 5$

La solution optimale est $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 2, 2, 0, 0)$ avec $z = 5$.



Résumé de l'algorithme

0. On part d'un PL en forme standard

1. On trouve une solution non-optimale en un point du polytope associé à notre PL

2. Tant qu'on peut, on évolue vers une solution proche qui améliore la fonction objectif. On réitère :

   a. Déterminer les variables basiques (non-nulles dans la solution courante)

   b. Écrire le tableau de simplexe qui exprime les variables basiques et la fonction objectif z en fonction des variables non-basiques

   c. Trouver une variable non-basique à augmenter pour augmenter z : c'est le pivot

   d. Si aucun pivot n'existe (on ne peut plus augmenter z), on a trouvé la solution optimale ! STOP

   e. Sinon, l'augmenter au maximum possible en fonction des contraintes de type $x_i \geq 0$ avec x_i les variables basiques
   (s'il n'y a pas de restriction sur le pivot, le PL est non borné : STOP)

   f. Calculer les nouvelles valeurs des variables : on obtient une nouvelle solution.

Pourquoi le nom ”simplexe” ?

Un simplexe dans un espace à n dimensions, c’est le polytope le plus simple dans cet espace.

→ En 2D : triangle, en 3D : tétrahèdre, etc.

Pourquoi le nom ”simplexe” ?

Un simplexe dans un espace à n dimensions, c'est le polytope le plus simple dans cet espace.

→ En 2D : triangle, en 3D : tétrahèdre, etc.

Interprétation géométrique de l'algorithme :

On est dans un espace à n dimensions, avec m variables basiques et $n-m$ variables non-basiques.

Pourquoi le nom "simplexe" ?

Un simplexe dans un espace à n dimensions, c'est le polytope le plus simple dans cet espace.

→ En 2D : triangle, en 3D : tétrahèdre, etc.

Interprétation géométrique de l'algorithme :

On est dans un espace à n dimensions, avec m variables basiques et $n-m$ variables non-basiques.

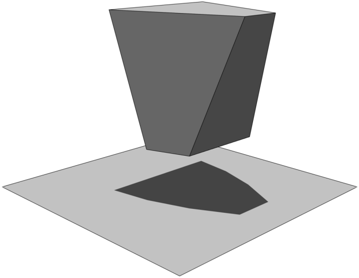
Les m variables basiques forment un simplexe en m dimensions.

Quand on pivote en changeant les valeurs de certaines variables, on trouve un nouveau simplexe en m dimensions.

Complexité de l'algorithme du simplexe

En pratique, l'algo du simplexe est rapide : la plupart du temps, $\approx 3m$ étapes de pivot (pour m contraintes) suffisent.

MAIS il existe des cas pathologiques (construits par Klee et Minty en 1973) avec environ 2^m étapes de pivot : on doit visiter tous les sommets du polytope...



Le cube de Klee et Minty

Victor L. Klee Jr.

(1925-2007)

George J. Minty Jr.

(1929-1986)

Il existe maintenant des algorithmes plus rapides, mais plus compliqués :

→ exemple : la méthode des points intérieurs