Variables aléatoires discrètes
(Probabilités)

A. Fradi, A. Khaldi, C. Samir, A. Wohrer

Université d'Auvergne

Clermont-Ferrand Aurillac Le Puy-en-Velay

BUT2 - IUT Info

Année 2023-2024

Avant de commencer

- Pour toutes questions sur le cours :

  `anis.fradi@uca.fr`
  `abderrahmane.khaldi@ext.uca.fr`
  `chafik.samir@uca.fr`
  `adrien.wohrer@uca.fr`

- Les transparents du cours et d'autres documents sont disponibles sur l'ENT.

Plan du cours aujourd’hui

1. Applications
2. Variable aléatoire
3. Fonction de répartition
4. Espérance et variance
5. Lois de probabilité d’une V. A. discrète

Loterie

Quel gain peut-on raisonnablement espérer ?

Intuitif ?

Espace probabilisé

Soit l'univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$ où chaque ω_i est une issue.
Soit P une mesure de probabilité sur l'ensemble Ω.
Ensemble ils définissent un **espace probabilisé**, noté (Ω, P).

Définition

- Ω est **fini** si le nombre des issues est fini.
  - *Ex : un seul lancer à Pile ou Face.* $\Rightarrow \Omega = \{P, F\}$.

Espace probabilisé

Soit l'univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ où chaque ω_i est une issue.
Soit P une mesure de probabilité sur l'ensemble Ω.
Ensemble ils définissent un **espace probabilisé**, noté (Ω, P).

Définition

- Ω est **fini** si le nombre des issues est fini.
  - *Ex : un seul lancer à Pile ou Face.* $\Rightarrow \Omega = \{P, F\}$.
- Ω est **dénombrable** s'il est assimilable aux nombres entiers.
  - *Ex : le nombre de lancers à PF requis pour obtenir Pile.*

Espace probabilisé

Soit l'univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ où chaque ω_i est une issue.
Soit P une mesure de probabilité sur l'ensemble Ω.
Ensemble ils définissent un **espace probabilisé**, noté (Ω, P).

Définition

- Ω est **fini** si le nombre des issues est fini.
  - *Ex : un seul lancer à Pile ou Face.* $\Rightarrow \Omega = \{P, F\}$.
- Ω est **dénombrable** s'il est assimilable aux nombres entiers.
  - *Ex : le nombre de lancers à PF requis pour obtenir Pile.*
- Ω est **continu** s'il est assimilable aux nombres réels.
  - *Ex : l'angle d'une aiguille tombée sur les rainures du parquet.*

Espace probabilisé

Soit l'univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ où chaque ω_i est une issue.
Soit P une mesure de probabilité sur l'ensemble Ω.
Ensemble ils définissent un **espace probabilisé**, noté (Ω, P).

Définition

- Ω est **fini** si le nombre des issues est fini.
  - *Ex : un seul lancer à Pile ou Face.* $\Rightarrow \Omega = \{P, F\}$.
- Ω est **dénombrable** s'il est assimilable aux nombres entiers.
  - *Ex : le nombre de lancers à PF requis pour obtenir Pile.*
- Ω est **continu** s'il est assimilable aux nombres réels.
  - *Ex : l'angle d'une aiguille tombée sur les rainures du parquet.*

Les cas fini et dénombrable ont un point commun : leurs différentes issues peuvent être *comptées* (1^e possibilité, 2^e possibilité, etc).
Dans ce cas, on parle de **probabilités discrètes**.

Dans le cas continu, ce ne sera plus le cas (semaine prochaine).

Exemple

Soit l'expérience aléatoire : lancer deux dés parfaits.

- $\Omega = \{(1,1),(1,2),(2,1),\dots,(6,6)\}$.

Exemple

Soit l'expérience aléatoire : lancer deux dés parfaits.

- $\Omega = \{(1,1),(1,2),(2,1),\dots,(6,6)\}$.
- On s'intéresse à la **variable aléatoire** S suivante :

$$S(\omega_1,\omega_2) = \omega_1 + \omega_2 = k$$

Exemple

Soit l'expérience aléatoire : lancer deux dés parfaits.

- $\Omega = \{(1,1),(1,2),(2,1),\ldots,(6,6)\}$.
- On s'intéresse à la **variable aléatoire** S suivante :
$$S(\omega_1,\omega_2) = \omega_1 + \omega_2 = k$$
- Les valeurs prises par S sont : $2 \leq S \leq 12$
- *Exemples* :
$P(S=0)=0$; $P(S=2)=\frac{1}{36}$; $P(S=10)=\frac{3}{36}$.

Exemple

Soit l'expérience aléatoire : lancer deux dés parfaits.

- $\Omega = \{(1,1),(1,2),(2,1),\ldots,(6,6)\}$.
- On s'intéresse à la **variable aléatoire** S suivante :
$$S(\omega_1,\omega_2) = \omega_1 + \omega_2 = k$$
- Les valeurs prises par S sont : $2 \leq S \leq 12$
- *Exemples* :
$P(S=0)=0$; $P(S=2)=\frac{1}{36}$; $P(S=10)=\frac{3}{36}$.
- Dessiner le graphe (S, P_S) pour $S = 0\ldots 14$.

Variable aléatoire discrète

Soit (Ω, P) un espace probabilisé discret (fini ou dénombrable).

Définition

- Une **variable aléatoire** (notée **v.a.**) X est une fonction définie sur Ω, et à valeurs réelles.

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & x \end{array}$$

Variable aléatoire discrète

Soit (Ω, P) un espace probabilisé discret (fini ou dénombrable).

Définition

- Une **variable aléatoire** (notée **v.a.**) X est une fonction définie sur Ω, et à valeurs réelles.

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & x \end{array}$$

- Les valeurs prises par X sont dénombrables : $\{x_1, x_2, \ldots\}$.
- On dit alors que X est une **v.a. discrète**.

Loi de probabilité discrète

Soit X une v.a. discrète.

Définition

- On introduit les évènements : $(X = x_i) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i\}$.

Loi de probabilité discrète

Soit X une v.a. discrète.

Définition

- On introduit les évènements : $(X = x_i) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i\}$.
- La **loi de probabilité** de X est la donnée des nombres

$$p_i = P(X = x_i).$$

Loi de probabilité discrète

Soit X une v.a. discrète.

Définition

- On introduit les évènements : $(X = x_i) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i\}$.
- La **loi de probabilité** de X est la donnée des nombres

$$p_i = P(X = x_i).$$

- On a : $0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum_i p_i = 1$.

Loi de probabilité discrète

Soit X une v.a. discrète.

Définition

- On introduit les évènements : $(X = x_i) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i\}$.
- La **loi de probabilité** de X est la donnée des nombres

$$p_i = P(X = x_i).$$

- On a : $0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum_i p_i = 1$.

Exemple

Pour la somme S de deux dés parfaits :

s_i	1	2	3	4	5	6	...
$P(S = s_i)$	$\frac{0}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	...

Fonction de répartition

Soit X une v.a. discrète.

Définition

- La **fonction de répartition** de X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Fonction de répartition

Soit X une v.a. discrète.

Définition

- La **fonction de répartition** de X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = P(X \leq x).$$

- C'est une fonction croissante en escalier.

Fonction de répartition

Soit X une v.a. discrète.

Définition

- La **fonction de répartition** de X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = P(X \leq x).$$

- C'est une fonction croissante en escalier.
- Pour $a \leq b$ on a $F(a) \leq F(b)$.

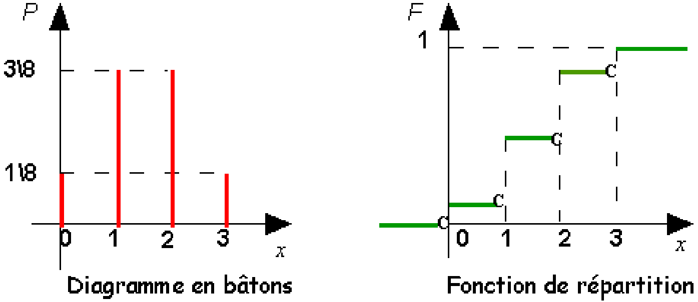
Fonction de répartition

Soit X une v.a. discrète.

Définition

- La **fonction de répartition** de X est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$F(x) = P(X \leq x).$$
- C'est une fonction croissante en escalier.
- Pour $a \leq b$ on a $F(a) \leq F(b)$.
- $\lim\limits_{a \mapsto -\infty} F(a) = 0$ et $\lim\limits_{a \mapsto +\infty} F(a) = 1$.

Exemple d'une fonction de répartition



Espérance

Soit X une v.a. discrète.

Définition

- L'**espérance** de X, notée $E[X]$, est le nombre défini par
$$E[X] = \sum_i x_i p_i$$
- Quand $E[X] = 0$ on dit que la variable X est centrée.

Espérance

Soit X une v.a. discrète.

Définition

- L'**espérance** de X, notée $E[X]$, est le nombre défini par
$$E[X] = \sum_i x_i p_i$$
- Quand $E[X] = 0$ on dit que la variable X est centrée.

Propriétés

- $E[aX + b] = aE[X] + b$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$. **[linéarité]**
- Si $X \geq Y$ alors $E[X] \geq E[Y]$.
- $E[f(X)] = \sum_i f(x_i)p_i$, pour toute fonction f sur $\mathbb{R}$.

Variance

Soit X une v.a. discrète.

Définition

- La **variance** de X, notée $V[X]$ est le nombre défini par
$$V[X] = E\left[(X - E[X])^2\right]$$
- Sa racine carrée est appelée **écart type** : $\sigma_X = \sqrt{V[X]}$.

Variance

Soit X une v.a. discrète.

Définition

- La **variance** de X, notée $V[X]$ est le nombre défini par
$$V[X] = E\left[(X - E[X])^2\right]$$
- Sa racine carrée est appelée **écart type** : $\sigma_X = \sqrt{V[X]}$.

Propriétés

- $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \quad = \sum_i x_i^2 p_i - (E[X])^2$
- $V[X] \geq 0$
- $V[aX + b] = a^2 V[X]$

Loi uniforme

On tire un objet au hasard parmi n.

Loi uniforme

On tire un objet au hasard parmi n.

Exemples

- Dé parfait : $X \sim U(6)$.
- Carte au hasard : $X \sim U(52)$.

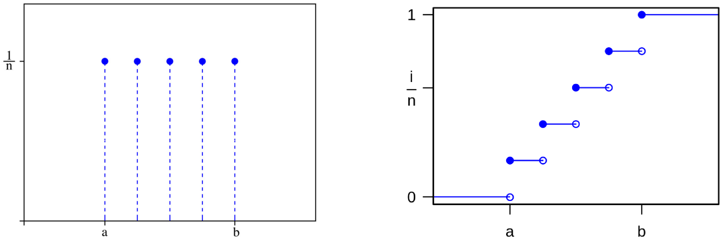
Loi uniforme

On tire un objet au hasard parmi n.

Exemples

- Dé parfait : $X \sim U(6)$.
- Carte au hasard : $X \sim U(52)$.

Fonction de masse et fonction de répartition :



Loi uniforme

On tire un objet au hasard parmi n.

Définition

Soit un entier n. On dit que X suit une **loi uniforme** sur $\{1, n\}$, et on note $X \sim U(n)$, lorsque :

$$\forall k = 1 \ldots n, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

Loi de Bernoulli

Un essai binaire, avec succès (1) ou échec (0).

Loi de Bernoulli

Un essai binaire, avec succès (1) ou échec (0).

Exemples

- Un tirage à pile ou face : $X \sim B(\frac{1}{2})$.
- Une vache au hasard est-elle atteinte de l'ESB ? $X \sim B(10^{-4})$.

Loi de Bernoulli

Un essai binaire, avec succès (1) ou échec (0).

Définition

Soit un nombre $0 \leq p \leq 1$. On dit que X suit une **loi de Bernoulli** avec probabilité de succès p, et on note $X \sim B(p)$, lorsque :

$$\begin{array}{rclr} P(X=1) & = & p & \text{(succès)} \\ P(X=0) & = & 1-p & \text{(échec)} \end{array}$$

Loi de Bernoulli

Un essai binaire, avec succès (1) ou échec (0).

Définition

Soit un nombre $0 \leq p \leq 1$. On dit que X suit une **loi de Bernoulli** avec probabilité de succès p, et on note $X \sim B(p)$, lorsque :

$$\begin{aligned} P(X=1) &= p && \text{(succès)} \\ P(X=0) &= 1-p && \text{(échec)} \end{aligned}$$

Propriétés

- $E[X] = p$
- $V[X] = p(1-p)$