Lois de probabilités discrètes usuelles
(Probabilités)

A. Fradi, A. Khaldi, C. Samir, A. Wohrer

2A - IUT Info

Année 2023-2024

Avant de commencer

- Pour toutes questions sur le cours :

  anis.fradi@uca.fr
  abderrahmane.khaldi@ext.uca.fr
  chafik.samir@uca.fr
  adrien.wohrer@uca.fr

- Les transparents du cours et d'autres documents sont disponibles sur l'ENT.

Plan du cours aujourd’hui

1. Rappels
2. Lois de probabilité usuelles

Variable aléatoire discrète

Définition

Une **variable aléatoire** réelle est un nombre X, associé à une expérience aléatoire, pouvant prendre des valeurs différentes en fonction de l'issue de l'expérience.

Variable aléatoire discrète

Définition

Une **variable aléatoire** réelle est un nombre X, associé à une expérience aléatoire, pouvant prendre des valeurs différentes en fonction de l'issue de l'expérience.

Une variable aléatoire réelle X est dite **discrète** si les valeurs prises par X sont dénombrables (finies ou infinies).

Variable aléatoire discrète

Étant donnée une variable aléatoire réelle discrète X, on peut définir les quantités suivantes :

Variable aléatoire discrète

Étant donnée une variable aléatoire réelle discrète X, on peut définir les quantités suivantes :

- **Loi de probabilité** de X : ensemble des probabilités

$$p_k = P(X = k)$$

Variable aléatoire discrète

Étant donnée une variable aléatoire réelle discrète X, on peut définir les quantités suivantes :

- **Loi de probabilité** de X : ensemble des probabilités

$$p_k = P(X = k)$$

- **Fonction de répartition** de X : ensemble des probabilités

$$F(k) = P(X \leq k)$$

Variable aléatoire discrète

Étant donnée une variable aléatoire réelle discrète X, on peut définir les quantités suivantes :

- **Loi de probabilité** de X : ensemble des probabilités
$$p_k = P(X = k)$$
- **Fonction de répartition** de X : ensemble des probabilités
$$F(k) = P(X \leq k)$$
- **Espérance** de X :
$$\mathrm{E}(X) = \sum_k k.p_k$$

Variable aléatoire discrète

Étant donnée une variable aléatoire réelle discrète X, on peut définir les quantités suivantes :

- **Loi de probabilité** de X : ensemble des probabilités

$$p_k = P(X = k)$$

- **Fonction de répartition** de X : ensemble des probabilités

$$F(k) = P(X \leq k)$$

- **Espérance** de X :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_k k.p_k$$

- **Variance** de X :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$$

Variable aléatoire discrète

Étant donnée une variable aléatoire réelle discrète X, on peut définir les quantités suivantes :

- **Loi de probabilité** de X : ensemble des probabilités
$$p_k = P(X = k)$$

- **Fonction de répartition** de X : ensemble des probabilités
$$F(k) = P(X \leq k)$$

- **Espérance** de X :
$$\mathrm{E}(X) = \sum_k k.p_k$$

- **Variance** de X :
$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$$

- **Écart-type** de X :
$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Loi uniforme

On tire un objet au hasard parmi n.

Loi uniforme

On tire un objet au hasard parmi n.

Exemples

- Dé parfait : $X \sim U(6)$.
- Carte au hasard : $X \sim U(52)$.

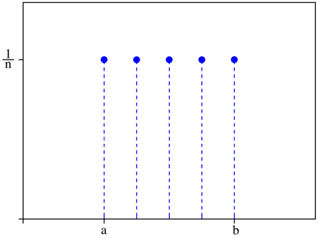
Loi uniforme

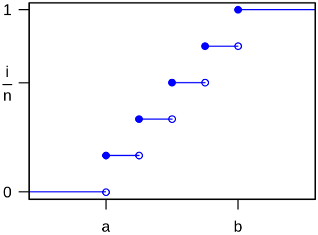
On tire un objet au hasard parmi n.

Exemples

- Dé parfait : $X \sim U(6)$.
- Carte au hasard : $X \sim U(52)$.

Fonction de masse et fonction de répartition :





Loi uniforme

On tire un objet au hasard parmi n.

Définition

Soit un entier n. On dit que X suit une **loi uniforme** sur $\{1, n\}$, et on note $X \sim U(n)$, lorsque :

$$\forall k = 1 \ldots n, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

Loi de Bernoulli

Un essai binaire, avec succès (1) ou échec (0).

Loi de Bernoulli

Un essai binaire, avec succès (1) ou échec (0).

Exemples

- Un tirage à pile ou face : $X \sim B(\frac{1}{2})$.
- Une vache au hasard est-elle atteinte de l'ESB ? $X \sim B(10^{-4})$.

Loi de Bernoulli

Un essai binaire, avec succès (1) ou échec (0).

Définition

Soit un nombre $0 \leq p \leq 1$. On dit que X suit une **loi de Bernoulli** avec probabilité de succès p, et on note $X \sim B(p)$, lorsque :

$$\begin{array}{lcll} P(X=1) & = & p & \quad\quad\quad\quad \text{(succès)} \\ P(X=0) & = & 1-p & \quad\quad\quad\quad \text{(échec)} \end{array}$$

Loi de Bernoulli

Un essai binaire, avec succès (1) ou échec (0).

Définition

Soit un nombre $0 \leq p \leq 1$. On dit que X suit une **loi de Bernoulli** avec probabilité de succès p, et on note $X \sim B(p)$, lorsque :

$$\begin{aligned} P(X=1) &= p && \text{(succès)} \\ P(X=0) &= 1-p && \text{(échec)} \end{aligned}$$

Propriétés

- $E[X] = p$
- $V[X] = p(1-p)$

Loi binomiale

On réalise n essais (binaires) identiques, et on **compte les succès**.

Loi binomiale

On réalise n essais (binaires) identiques, et on **compte les succès**.

Exemples

- Combien de Pile parmi 100 tirages à PF ? $X \sim Bin(100, \frac{1}{2})$
- Combien de vaches folles parmi 1000 ? $X \sim Bin(10^3, 10^{-4})$

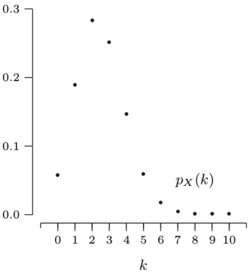
Loi binomiale

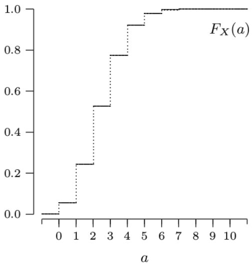
On réalise n essais (binaires) identiques, et on **compte les succès**.

Exemples

- Combien de Pile parmi 100 tirages à PF ? $X \sim Bin(100, \frac{1}{2})$
- Combien de vaches folles parmi 1000 ? $X \sim Bin(10^3, 10^{-4})$

Fonction de masse et fonction de répartition, pour la loi $Bin(10, \frac{1}{4})$





Loi binomiale

On réalise n essais (binaires) identiques, et on **compte les succès**.

Définition

Soit un nombre $0 \leq p \leq 1$, et un entier n. On dit que X suit une **loi binomiale** de paramètres (n,p), et on note $X \sim Bin(n,p)$, lorsque :

$$\forall k \in \{0, n\}, \qquad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

où le **coefficient binômial** est défini par la formule suivante :

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times (k-2) \cdots \times 1}.$$

Loi binomiale

On réalise n essais (binaires) identiques, et on **compte les succès**.

Définition

Soit un nombre $0 \leq p \leq 1$, et un entier n. On dit que X suit une **loi binomiale** de paramètres (n,p), et on note $X \sim Bin(n, p)$, lorsque :

$$\forall k \in \{0, n\}, \qquad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

où le **coefficient binômial** est défini par la formule suivante :

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times (k-2) \cdots \times 1}.$$

Propriétés

- $X \in \{0, n\}$
- $E[X] = np$
- $V[X] = np(1-p)$

Loi géométrique

On répète le même essai (binaire) autant de fois que nécessaire, jusqu'à obtenir le **premier succès**.

Loi géométrique

On répète le même essai (binaire) autant de fois que nécessaire, jusqu'à obtenir le **premier succès**.

Exemples

- Combien de lancers PF avant le premier Pile ? $X \sim Geo(\frac{1}{2})$
- Combien d'heures mal garé avant la contravention ? $X \sim Geo(\frac{1}{4})$

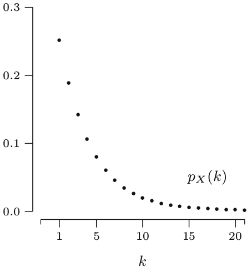
Loi géométrique

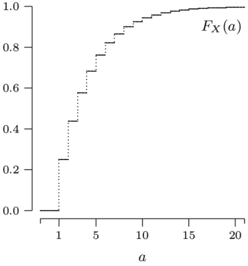
On répète le même essai (binaire) autant de fois que nécessaire, jusqu'à obtenir le **premier succès**.

Exemples

- Combien de lancers PF avant le premier Pile ? $X \sim Geo(\frac{1}{2})$
- Combien d'heures mal garé avant la contravention ? $X \sim Geo(\frac{1}{4})$

Fonction de masse et fonction de répartition, pour la loi $Geo(\frac{1}{4})$:





Loi géométrique

On répète le même essai (binaire) autant de fois que nécessaire, jusqu'à obtenir le **premier succès**.

Définition

Soit un nombre $0 \leq p \leq 1$. On dit que X suit une **loi géométrique** de paramètre p, et on note $X \sim Geo(p)$, lorsque :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$$

Loi géométrique

On répète le même essai (binaire) autant de fois que nécessaire, jusqu'à obtenir le **premier succès**.

Définition

Soit un nombre $0 \leq p \leq 1$. On dit que X suit une **loi géométrique** de paramètre p, et on note $X \sim Geo(p)$, lorsque :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$$

Propriétés

- $X \in \mathbb{N}^*$ (ensemble dénombrable infini)
- $E[X] = \frac{1}{p}$
- $V[X] = \frac{1-p}{p^2}$

Loi de Poisson

Des objets, tous identiques et indépendents, apparaissent au hasard. On connaît juste le **nombre moyen** attendu.

Loi de Poisson

Des objets, tous identiques et indépendents, apparaissent au hasard. On connaît juste le **nombre moyen** attendu.

Exemples

- Combien d'orages en août à Clermont-Ferrand ? $X \sim Pois(0.9)$
- Un mardi matin à la station Jaude, combien de personnes arrivent à l'arrêt de tram entre 7h et 7h05 ? $X \sim Pois(5)$

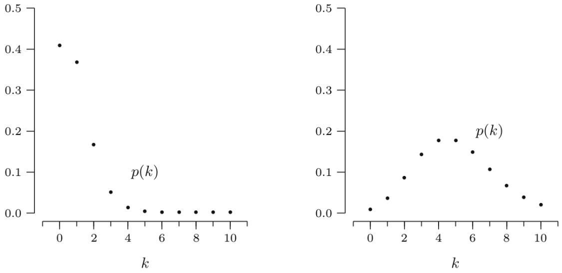
Loi de Poisson

Des objets, tous identiques et indépendents, apparaissent au hasard. On connaît juste le **nombre moyen** attendu.

Exemples

- Combien d'orages en août à Clermont-Ferrand ? $X \sim Pois(0.9)$
- Un mardi matin à la station Jaude, combien de personnes arrivent à l'arrêt de tram entre 7h et 7h05 ? $X \sim Pois(5)$

Fonctions de masse pour $Pois(0.9)$ (à gauche) et $Pois(5)$ (à droite) :



Loi de Poisson

Des objets, tous identiques et indépendents, apparaissent au hasard. On connaît juste le **nombre moyen** attendu.

Définition

Soit un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que X suit une **loi de Poisson** de paramètre λ, et on note $X \sim Pois(\lambda)$, lorsque :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Loi de Poisson

Des objets, tous identiques et indépendents, apparaissent au hasard. On connaît juste le **nombre moyen** attendu.

Définition

Soit un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que X suit une **loi de Poisson** de paramètre λ, et on note $X \sim Pois(\lambda)$, lorsque :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Propriétés

- $X \in \mathbb{N}$ (ensemble dénombrable infini)
- $E[X] = \lambda$, $V[X] = \lambda$.

Loi de Poisson

Des objets, tous identiques et indépendents, apparaissent au hasard. On connaît juste le **nombre moyen** attendu.

Définition

Soit un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que X suit une **loi de Poisson** de paramètre λ, et on note $X \sim Pois(\lambda)$, lorsque :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Propriétés

- $X \in \mathbb{N}$ (ensemble dénombrable infini)
- $E[X] = \lambda$, $V[X] = \lambda$.
- La loi de Poisson $Pois(\lambda)$ peut être vue comme la **limite d'une loi binomiale** $B(n, p)$ lorsque p est petit et n grand, alors que la moyenne $\lambda = np$ reste proche de l'unité.