Probabilités A. Fradi
Université Clermont Auvergne A. Khaldi
IUT Clermont Auvergne C. Samir
2A BUT Info, 2023-2024 A. Wohrer

TD2 – Évènements, probabilités

Exercice 1.
Un sac contient dix billes numérotées de 1 à 10. Les billes portant les numéros 1, 2, 3, 4, 5 sont jaunes, celles portant les numéros 6, 7, 8 sont rouges, les autres sont vertes. On tire simultanément deux billes. On considère les événement suivants :

- A=« les deux billes ont des numéros pairs » ; B=« les deux billes ont des numéros impairs » ; C=« les deux billes sont de même couleur ».
- J=« les deux billes sont jaunes » ; R=« les deux billes sont rouges » ; V=« les deux billes sont vertes ».

1. Donnez l'univers de cette expérience, et sa taille. Donnez quelques exemples d'issues.
2. Indiquer si chacune des relations suivantes est vraie ou fausse :
$$A \cup B = \Omega \quad ; \quad A = \bar{B} \quad ; \quad V \subset A \quad ; \quad V \subset \bar{B} \quad ; \quad C = J \cup R \cup V.$$
3. Calculer le nombre d'éléments de : Ω, J, R, V.
4. Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$.

Exercice 2.
On choisit un mois de l'année, avec probabilité uniforme (1/12 pour chaque mois). On considère les évènements suivants :

- A = « Le numéro du mois est pair. »
- B = « Le mois fait partie de la première partie de l'année. »
- C = « C'est un mois d'été (juin, juillet, aout). »

Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Les évènements A et C sont-ils indépendants ?

Exercice 3.
Dans un IUT avec 3 départements (Info, Biologie, Gestion), voici le pourcentage de filles dans chaque département :

- Info : 15% de filles,
- Gestion : 50% de filles,
- Bio : 60% de filles.

Par ailleurs, voici le nombre total d'étudiants dans chaque département :

- Info : 120 étudiants,
- Gestion : 40 étudiants,
- Bio : 40 étudiants.

Vous interrogez une étudiante au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit en Info ?

Exercice 4.
Deux évènements A et B sont indépendants. De plus, ils vérifient $P(B|A \cup B) = 2/3$, et $P(A|B) = 1/2$. Que vaut $P(B)$?

Exercice 5.
Lors d'une une épreuve orale pour obtenir l'ancien DUT, l'étudiant devait tirer 3 sujets parmi 80 sujets différents, et traiter au choix l'un des trois sujets tirés.

1. Combien de tirages sont possibles ?
2. Un étudiant se présente en n'ayant révisé que 50 sujets. Après tirage, quelle est la probabilité qu'il ait révisé les trois sujets ? Seulement deux sujets ? Seulement un sujet ? Aucun sujet ?
3. Combien de sujets au minimum un étudiant doit-t-il réviser pour avoir une probabilité supérieure à 90% de savoir traiter au moins l'un des sujet ?

Exercice 6.
Lors de la crise de la vache folle (fin du XX^e siècle), on pouvait tester un animal pour la maladie. En cas de résultat positif, tout le troupeau était abattu. Ici, on considère l'expérience aléatoire « tester une vache au hasard », et les deux évènements suivants :

- Évènement M : la vache est porteuse de la maladie.
- Évènement T : le test sur la vache est positif.

1. Les données dont on dispose sur la maladie sont les suivantes :
   a) En moyenne, une vache sur 10 000 est porteuse de la maladie.
   b) Sur une vache malade, le test est positif 98% des fois.
   c) Sur une vache saine, le test est négatif 99.85% des fois.

   Traduisez ces informations en termes de probabilités sur les évènements M, $\overline{M}$ et T.
2. Calculez la probabilité $P(M \cap T)$, et donnez son interprétation en mots. Même question avec la probabilité $P(\overline{M} \cap T)$.
3. À partir de la question précédente, calculez $P(T)$. Enfin, calculez $P(M|T)$. Que peut-on en conclure concernant l'efficacité du test ?

Exercice 7.
Vos nouveaux voisins viennent d'emménager. Vous savez, par ouï-dire, qu'ils ont deux enfants, mais vous ignorez leurs sexes.

1. On suppose que les voisins sont des humains « standard », avec autant de chances de donner naissance à des garçons qu'à des filles, et que les sexes des deux enfants sont indépendants. Sans rien connaître d'autre, quelle est la probabilité qu'ils aient (au-moins) un garçon ?
2. Lors de leur emménagement vous apercevez un carton rempli de petites robes. Vous en déduisez (avec très forte probabilité !) que *les voisins ont (au moins) une fille*. Quelle est la probabilité qu'ils aient également un garçon ?
3. Vous invitez vos voisins à déjeuner avec leurs deux enfants. Le premier enfant que vous apercevez est une fille. Quelle est la probabilité que le second enfant soit un garçon ?
4. (**) Pourquoi n'obtient-on pas la même probabilité à la question 2 et à la question 3 ?