Théorie des ensembles

Exercice 1. *

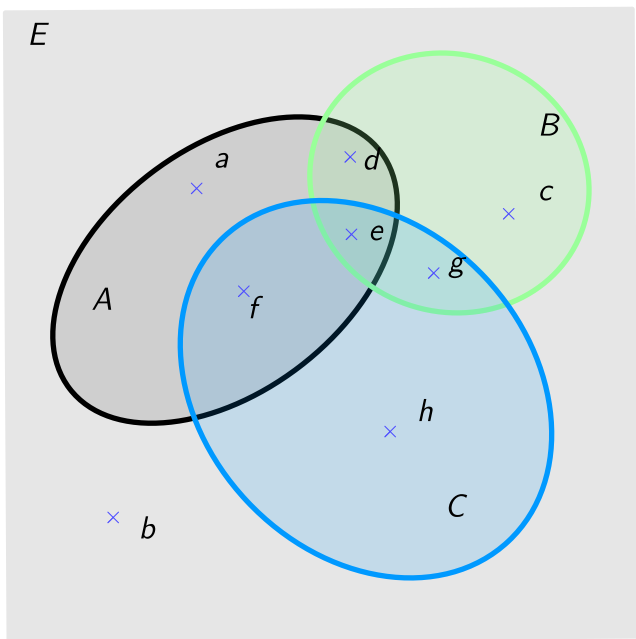
On considère l'univers suivant : $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, ainsi que 3 de ses parties :

$$A = \{a, d, e, g\}, \quad B = \{b, d, e, h\}, \quad C = \{c, e, g, h\}$$

1. Dessinez un diagramme de Venn représentant l'univers U et les trois sous-ensembles A,B,C. Placez les éléments a, b, c, d, e, f, g, h dans ce diagramme.
2. Donnez le contenu des ensembles suivants :
$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad \overline{C}, \quad (A \cup C) \cap B, \quad \overline{A \cap B} \cap C.$$
3. Une opération très courante (que vous devez connaître !) est la *différence* de 2 ensembles :
$$B \backslash A = B \cap \overline{A}$$
Donnez le contenu de $B\backslash A$ dans notre exemple. Avec des mots, que contient l'ensemble $B\backslash A$?
4. Listez toutes les parties de l'ensemble A. Combien y en a t'il ?
5. Combien l'univers U admet-il de parties ?

Exercice 2. *

On considère le diagramme de Venn suivant, avec A, B, C trois parties d'un ensemble E, et a, b, c, d, e, f, g, h des élements de E.



Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $g \in A \cap \bar{B}$;
2. $g \in \bar{A} \cap \bar{B}$;
3. $g \in \bar{A} \cup \bar{B}$;
4. $f \in C \backslash A$;
5. $e \in \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$;
6. $\{h, b\} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$;
7. $\{a, f\} \subseteq A \cup C$.

Exercice 3. *

Justifiez chacune des relations suivantes, à l'aide de diagrammes de Venn, pour des ensembles quelconques.

1. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
4. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Remarque : vous devez comprendre toutes ces relations, et savoir les utiliser.

Exercice 4. **

Écrire en extension (c'est-à-dire en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants :

$$A = \left\{ \text{nombres entiers compris entre } \sqrt{2} \text{ et } 2\pi \right\}.$$

$$B = \{\text{fractions } \frac{p}{n} \text{ telles que } 1 \leq p \leq 2n \leq 7\}$$

(Pour B, attention aux répétitions !)

Exercice 5. *

Est-ce que $C \subseteq A \cup B$ entraîne obligatoirement $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$?

(La réponse est NON : faites un dessin et trouvez un contre-exemple !)

Exercice 6. **

Soient A, B, C trois ensembles tels que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subseteq B \subseteq C$.

Exercice 7. ***

Soit E un ensemble et A, B, C trois éléments de $\mathcal{P}(E)$.

1. Démontrer que, si $A \cap B = A \cup B$, alors $A = B$.
2. Démontrer que, si $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$, alors $B = C$.

Exercice 8. **
Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. On appelle *différence symétrique* de A et B, notée $A\Delta B$, le sous-ensemble de E :

$$A\Delta B = \{x \in A \cup B;\ x \notin A \cap B\}.$$

1. Interpréter les éléments de $A\Delta B$, d'abord à l'aide d'un diagramme de Venn, puis d'une phrase en français.
2. À l'aide d'un diagramme de Venn, vérifiez que $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.
3. Calculez $A\Delta A$, $A\Delta\varnothing$, $A\Delta E$, $A\Delta\overline{A}$.
4. Vérifiez que pour tous A, B, C sous-ensembles de E, on a :

$$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C).$$

Exercice 9. **
Soient deux ensembles E et F. Utilisez des diagrammes de Venn pour répondre aux questions suivantes.

1. Soit A une partie de $E \cap F$. A est-elle une partie de E ? de F ? En déduire une comparaison de $\mathcal{P}(E \cap F)$ avec $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
2. Soit B un ensemble qui est à la fois contenu dans E et aussi dans F. B est-il contenu dans $E \cap F$? En déduire une deuxième comparaison de $\mathcal{P}(E \cap F)$ avec $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
3. Démontrer que $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ est inclus dans $\mathcal{P}(E \cup F)$.
4. Donner un exemple simple prouvant que l'inclusion réciproque n'est pas toujours vraie.

Exercice 10. ***
Soit E un ensemble et soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$:

1. $A \cup X = B$;
2. $A \cap X = B$.

(Commencez par vous demander à quelles conditions sur A et B une solution peut exister.)

Exercice 11. ***
Soit E un ensemble et soient A, B deux parties de E. On rappelle que la *différence symétrique* de A et B est définie par

$$A\Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

où $\bar{A}$ (resp. $\bar{B}$) désigne le complémentaire de A (resp. de B) dans E. Démontrer que $A\Delta B = B$ si et seulement si $A = \varnothing$.