Probabilités avec plusieurs variables

(Probabilités)

A, Fradi, A. Khaldi, C. Samir, A. Wohrer

Université d'Auvergne
Clermont-Ferrand Aurillac Le Puy-en-Velay

2A - IUT Info

Année 2023-2024

Avant de commencer

- Pour toutes questions sur le cours :

anis.fradi@uca.fr
abderrahmane.khaldi@ext.uca.fr
chafik.samir@uca.fr
adrien.wohrer@uca.fr

- Les transparents du cours et d'autres documents sont disponibles sur l'ENT.

Plan du cours aujourd’hui

1. Covariance
2. Variables indépendantes
3. Théorème central limite

Covariance

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires. Leur **covariance** est le nombre défini par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

Covariance

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires. Leur **covariance** est le nombre défini par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

Intuition :

- si $\mathrm{Cov}(X,Y) > 0$, les variables X et Y ont tendance à « varier dans le même sens »

Covariance

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires. Leur **covariance** est le nombre défini par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

Intuition :

- si $\mathrm{Cov}(X,Y) > 0$, les variables X et Y ont tendance à « varier dans le même sens »
- si $\mathrm{Cov}(X,Y) < 0$, les variables X et Y ont tendance à « varier dans des sens opposés »

Covariance

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires. Leur **covariance** est le nombre défini par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

Intuition :

- si $\mathrm{Cov}(X,Y) > 0$, les variables X et Y ont tendance à « varier dans le même sens »
- si $\mathrm{Cov}(X,Y) < 0$, les variables X et Y ont tendance à « varier dans des sens opposés »
- si $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, les variables X et Y n'ont pas tendance à covarier, ni dans un sens dans l'autre.

Covariance

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires. Leur **covariance** est le nombre défini par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

Exemples : On contacte une personne au hasard au téléphone.

- X=son âge, Y=son patrimoine.
  $\Longrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) > 0$.

Covariance

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires. Leur **covariance** est le nombre défini par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

Exemples : On contacte une personne au hasard au téléphone.

- X=son âge, Y=heures de sommeil hebdomadaires.
  $\Longrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) < 0$.

Covariance

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires. Leur **covariance** est le nombre défini par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

Exemples : On contacte une personne au hasard au téléphone.

- X=son âge, Y=sa consommation d'eau.
  $\Longrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) \simeq 0$.

Covariance

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires. Leur **covariance** est le nombre défini par

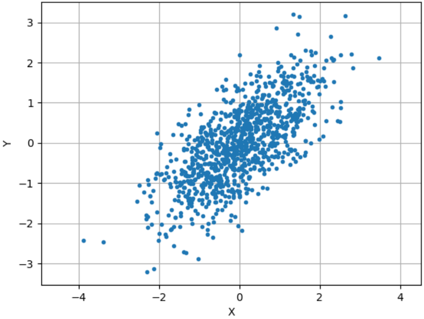
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

Remarque : $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$ (toujours > 0, logique !)

La covariance visuellement

Voici un échantillon de tirages de 2 variables aléatoires (X, Y) telles que

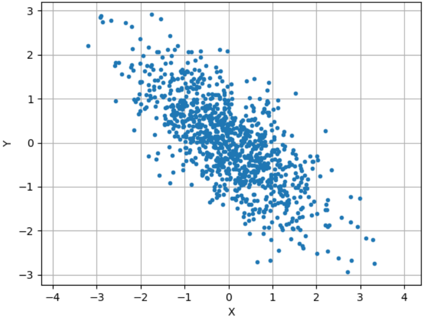
$$\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$$



La covariance visuellement

Voici un échantillon de tirages de 2 variables aléatoires (X, Y) telles que

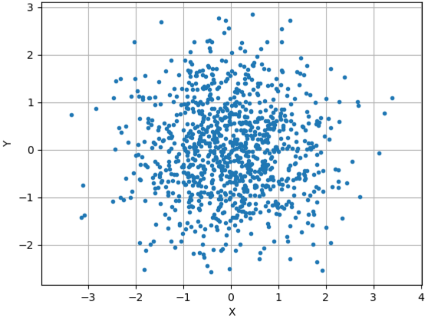
$$\mathrm{Cov}(X, Y) < 0$$



La covariance visuellement

Voici un échantillon de tirages de 2 variables aléatoires (X, Y) telles que

$$\mathrm{Cov}(X, Y) \simeq 0$$



Variables indépendantes

Propriété

Soient X et Y deux variables **indépendantes**. Alors

1. Les espérances se factorisent :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Variables indépendantes

Propriété

Soient X et Y deux variables **indépendantes**. Alors

1. Les espérances se factorisent :
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
2. Les variances s'additionnent :
$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Variables indépendantes

Propriété

Soient X et Y deux variables **indépendantes**. Alors

1. Les espérances se factorisent :
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
2. Les variances s'additionnent :
$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

ATTENTION ! Ces propriétés ne sont vraies QUE si les variables sont indépendantes.

Covariance et indépendance

Propriété

Soient X et Y deux variables **indépendantes**. Alors

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

Covariance et indépendance

Propriété

Soient X et Y deux variables **indépendantes**. Alors

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

Preuve : D'après la propriété précédente, $E(XY) = E(X)E(Y)$. Donc

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

Covariance et indépendance

Propriété

Soient X et Y deux variables **indépendantes**. Alors

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$$

Preuve : D'après la propriété précédente, $E(XY)=E(X)E(Y)$. Donc

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

ATTENTION ! Il est également possible d'avoir $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ même si les variables X et Y ne sont pas indépendantes. Exemple en TD.

Théorème de la limite centrale

Théorème

Soit une suite de v.a. quelconques $X_1, X_2, \ldots, X_n$, **indépendantes** et de même loi. Soit m leur espérance et σ leur écart-type.
Alors, la v.a. suivante :

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nm}{\sigma\sqrt{n}}$$

converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

Théorème de la limite centrale

Théorème

Soit une suite de v.a. quelconques $X_1, X_2, \ldots, X_n$, **indépendantes** et de même loi. Soit m leur espérance et σ leur écart-type.
Alors, la v.a. suivante :

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nm}{\sigma\sqrt{n}}$$

converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

Explication intuitive

Lorsqu'une variable Y résulte de l'addition de nombreuses variables indépendantes, alors la loi de Y est toujours (approx.) normale.